ПРИМЕР КОНСТРУИРОВАНИЯ КРИВЫХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ПУТЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА

Ауез Кенесбекович БАЙДАБЕКОВ

Доктор технических наук, профессор
Евразийского национального образования им. Л.Н. Гумилева

Нурлан Сагинбекович УМБЕТОВ

Кандидат технических наук, старший преподаватель
Южно-Казахстанского государственного университета им. М. Ауезова

Уалихан Кажиакбарович КУСЕБАЕВ

Кандидат технических наук, доцент
Южно-Казахстанского государственного университета им. М. Ауезова

При конструировании линейчатых и нелинейчатых поверхностей, основное внимание уделяют их простоте. Чтобы в сечении их плоскостями содержались прямые и кривые второго порядка. Это объясняется их широким распространением в технике ввиду простоты геометрического моделирования и аналитического описания.

Преобразования пространства, расслаивающейся в пучке плоскостей на центральные кремоновые преобразования с центром в свободной точке пересечения пучка с фокальной кривой конгруэнции, примечательны тем, что состоят из совокупности преобразований плоскостей. Поэтому построение соответственных точек преобразования можно осуществлять графически и аналитически [1].

Пусть в евклидовом пространстве E_3, дополненном несобственной плоскостью, даны квадрика δ^2, пучок плоскостей $l(\alpha)$ с несобственной прямой – осью l_∞ и две пространственные алгебраические кривые a^u, f^v порядков u, v, имеющих с прямой l соответственно u-1, v-1 фиксированных точек A_q, F_g. Плоскость α_i пучка $l_\infty(\alpha)$ пересекает квадрику δ^2 по окружности d^2, а кривые a^u, f

каждую в одной свободной точке, соответственно A, F (остальные u-1, v-1 точек A_q, F_g фиксированы на l_∞).

При проецировании этой конструкции на одну из плоскостей пучка (l_∞) получаем множество окружностей – проекции сечений квадрики плоскостями уровня, проекции a_1^u, f_1^v кривых a^u, f^v содержат множество точек $A_1 \in a_1^u$,, $F_1 \in f_1^v$.

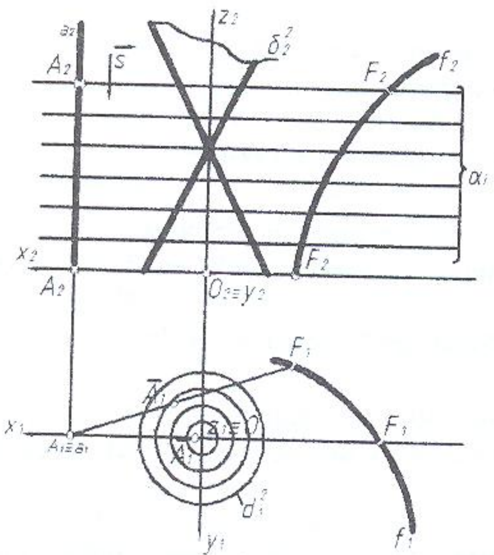

Рисунок 1 – Преобразование Гирста

В каждой секущей плоскости α_i рассматриваем преобразование Гирста, задаваемое инвариантной коникой d^2 и парой совпавших ассоциированных F точек, $F^3 \equiv F^{3'}$ (рисунок 1). Точке A ставится в соответствие точка A' пересечения прямой AF с полярой $\bar{a}$ точки A относительно d^2. Таким образом, на плоскости проекции множеству точек A, составляющих кривую a_1^u взаимно однозначно соответствует множество точек A_1', образующих кривую $a_1^{u'}$ [1].

Если в качестве квадрики выбран прямой круговой конус, а направление проецирования совпадает с его осью, то на плоскости проекций получается концентрический пучок окружностей (рисунок 1).

В данном преобразований если траектория перемещения центров преобразования – прямая, то образом точки относительно концентрического пучка окружностей является кривая 3-го порядка. Если траектория перемещения центров преобразования кривая 2-го порядка, то образом точки относительно пучка концентрических окружностей является кривая 6-го порядка. А если траектория перемещения центров преобразования кривая 3-го порядка, то образом точки относительно пучка концентрических окружностей является кривая 9-го порядка (рисунок 2). Остановимся более подробно на последнем предложений.

Действительно, пучок прямых 1-го порядка $(\underset{\infty}{A'})$ пересекается с пучком прямых 3-го порядка (A). Каждой прямой $\bar{a}$ пучка $(\underset{\infty}{A'})$ соответствует шесть прямых AF_i пучка (A) и наоборот, каждой прямой AF_i пучка (A) соответствует одна прямая $\bar{a}$ пучка $(\underset{\infty}{A'})$. Следовательно, соответствие между пучками (A) и $(\underset{\infty}{A'})$ [1, 6] - значное. Порядок алгебраической кривой – результат пересечения соответственных прямых двух пучков равен [2]

$$1 \times 6 + 3 \times 1 = 9$$

Вывод уравнения кривой.

В уравнение кривой f^3 [4]

$$Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + 3Ex^2 + 6Fxy + 3Gy^2 + Hx + Jy + K = 0,$$

подставляем значения координат x_F, y_F точки F при условии, что радиус концентрической окружности меняется по закону $R = \left| \xi y_F \right|$ (3)

$$x_F = \frac{\sqrt{M} - \xi y_A}{\xi (y - y_A)}(x - x_A) + x_A \qquad (1)$$

$$y_F = \frac{1}{\xi}\sqrt{M} \qquad (2)$$

где $M = xx_A + yy_A - x_0(x + x_A) - y_0(y + y_A) + x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2}$.

Тогда, уравнение кривой a' - образа точки $A(x_A, y_A)$, имеет вид:

$$(y - y_A)^3\{DM\sqrt{M}\xi + 3M(C\xi^2 x_A + G) + \sqrt{M}\xi^3(3Bx_A^{\ 2} + 6Fx_A + J) +$$
$$+ \xi^4 x_A(Ax_A^{\ 2} + 3Ex_A + H) + K\xi^3\} + (y - y_A)^2\{(\sqrt{M} - \xi y_A)(x - x_A)[3CM\xi +$$
$$+ 6\xi^2\sqrt{M}(Bx_A + F) + \xi^3(3Ax_A^{\ 2} + 6Ex_A + H + K)]\} + (y - y_A)3\xi(\sqrt{M} -$$
$$- \xi y_A)^2(x - x_A)^2[B\sqrt{M} + \xi(Ax_A + E)] + A\xi(\sqrt{M} - \xi y_A)^3(x - x_A)^3 = 0$$

Пример I. Пусть задано уравнение траектории перемещения центров преобразования

$$x^3 + y^3 - 3cxy = 0$$

и координаты двух точек кривой a' : 0(0, 0) $A(x_A, 0)$ (рисунок 2).
Уравнение искомой кривой a' запишется в виде

$$y^6[x(x+3c\xi^2)^2 + \xi^6 x_A{}^3]x_A{}^3\xi^2 + y^5(x+4\xi^2 c)6xx_A{}^4\xi^4(x-x_A) +$$
$$+3y^4\xi^4 xx_A{}^2(x-x_A)^2(5\xi^2 x_A{}^3 + 3xc^2) + 2y^3(x+12\xi^2 c)(x-x_A)^3\xi^2 x_A{}^3 x^2 +$$
$$+3y^2(x-x_A)^4 x_A{}^4\xi^3 x^2(2+3\xi) + x^3 x_A{}^3\xi^2(x-x_A)^6 = 0$$

Пример II. Траектория перемещения центров преобразования - кривая f^3:

$$y^2 = x^3 \qquad (3)$$

Записать уравнение кривой, проходящей через точки О(0, 0) и $A(x_A, 0)$ (рисунок 3).
Алгоритм решения задачи:

1. Задаемся $\xi = 2$;
2. Подставляя в (1), (2) значения x_A и ξ, определяем значения координат точек F_i

$$x_F = \frac{1}{2y}\sqrt{xx_A}(x - x_A) + x_A;$$

$$y_F = \frac{1}{2}\sqrt{xx_A}$$

3. Записываем уравнение кривой a', подставляя в (3) значения координат точек F_i (x_F, y_F)

$$4(x-4x_A{}^2)y^6 - 24xx_A(x-x_A)^2[x-4x_A{}^2 + 6x_A{}^2(x-x_A)^2]y^4 -$$
$$-24x_A{}^2 x(x-x_A)^4 y^2 - x_A x^3(x-x_A)^6 = 0$$

Итак, мы рассмотрели аппарат мгновенных преобразований Гирста при перемешении центра преобразований F и изменений радиуса R окружности d^2 по заданному линейному закону. Этот метод позволяет получать алгебраические кривые с замкнутой петлей. Применение таких кривых для конструирования аэродинамических профилей имеет важное прикладное значение.

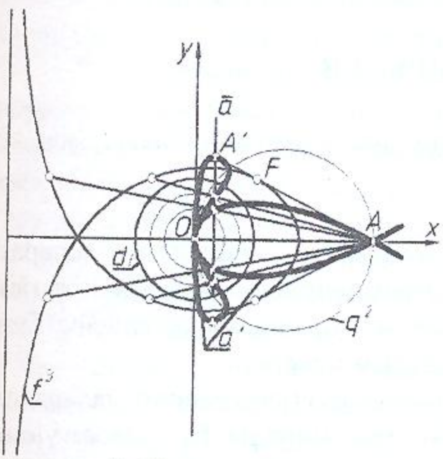

Рисунок 2 – Пучок концентрических окружностей

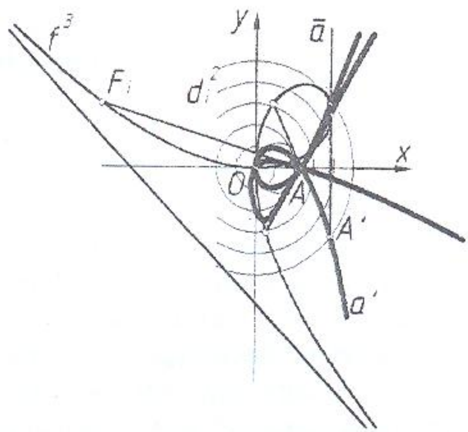

Рисунок 3 – Траектория перемешения центров

Список использованной литературы:

1. Иванов Г.С. Теоретические основы начертательной геометрии. – М.: Машиностроение, 1998. – 157 с.
2. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойство, применения. (Справочное руководство). – М.:Физматгиз, 1960, – 293 с.
3. Александров П.С. Курс лекции по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1979. – 572 с.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1966, – 831 с.