УДК 501.96

Жаныс А.Б., доктор PhD, и.о. профессора Кокшетауского университета им. А.Мырзахметова
Саброва А.С., магистр, Кокшетауский университет им. А. Мырзахметова

РОЛЬ МЕТОДОВ НАУЧНОГО ПОЗНАНИЯ В ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ

Аннотация: *Главной задачей специалиста-математика является умение правильно применять методы познания: анализ, синтез, абстрагирование, обобщение, индукцию, дедукцию, аналогию и др. Для решения поставленных задач. В единстве методов математики и заключается специфика математического мышления. Математический язык уникален, язык благодаря которому раскрываются, воссоздается, обобщается, и воспроизводиться научное знание. Изящество и ценность математической мысли – это четкость ее логики, красота конструкций в идеальном построении абстракции.*
Ключевые слова: *анализ, синтез, абстрагирование, обобщение, индукция, дедукция, математический язык, мышление, аналогия, восходящий анализ.*
Abstract: *An important skill in research specialist mathematics is the ability to use the operations of thinking: analysis, synthesis, abstraction, generalization, induction, deduction, analogy, and others for the task.The unity of analysis, synthesis, induction, deduction, and other methods of scientific knowledge in mathematics determine the specificity of mathematical thinking, and allows you to talk about the special language of mathematics, in which not only reflects reality, but also synthesized, summarized, projected scientific knowledge.The second chapter discussed application of scientific knowledge by a series of specific tasks aimed at developing the skills of research activities in the field of mathematics.*
Keywords: *analysis, synthesis, abstraction, generalization, induction, deduction, mathematical language, thinking, analogy, bottom-up analysis.*

Успех в профессиональной деятельности во многом определяется правильностью выбранного пути, точностью выбранного метода исследования. Правильное использование методов исследования способствует более быстрому достижению положительных результатов, которые в значительной степени зависят от того, насколько удачно человек научиться пользоваться математическим стилем мышления, строить количественные модели процессов, ставить математически осмысленные задачи и использовать огромные уже накопленные математикой средства и методы исследования.

В современном высшем образовании при изучении, как фундаментальных математических наук, так и профильных дисциплин математическое мышление играет огромную роль в развитии умственного потенциала личности.

Однако задача развития математического мышления в настоящее время не выдвигается как самостоятельная, а как правило, решается на ряду с усвоением программного материала. Определенная доля степени развития математического мышления в ходе усвоения знаний, конечно, есть, но такого стихийного пути явно недостаточно, так как специалист-математик должен ясно осознавать основные пути и методы решения задач, самостоятельно уметь планировать свою деятельность.

Разные учёные, занимающиеся изучением психологии мышления по-разному трактуют данное понятие в зависимости от того, на что конкретно они делают акцент. Так, например, известный психолог О.Зельц различал продуктивное и репродуктивное мышление. Продуктивное мышление, в отличие от репродуктивного, предполагает появление нового продукта: знания, материального объекта, произведения искусства.

Такое разделение С.Л. Рубинштейн считал не верным, так как, по его мнению *«мышление не сводится к функционированию уже готовых знаний; оно должно быть раскрыто прежде всего как продуктивный процесс, способный приводить к новым знаниям»*.

С ним согласен и А.В. Брушлинский, полагая, что в самом понятии мышления заложено появление нового: «*Мышление можно определить, как неразрывно связанный психический процесс самостоятельного искания и открывания существенно нового, т.е. опосредованного обобщенного отражения деятельности входе ее анализа и синтеза, возникающий на основе практической деятельности из чувственного познания и далеко выходящий за ее пределы*».

«Под *мышлением* понимается процесс познавательной активности человека, характеризующийся обобщенными опосредованным отражением предметов и явлений действительности в их существенных свойствах, связях и отношениях».

Мышление как процесс, наиболее ярко выступает при решении человеком какой-либо задачи. Этот процесс решения задачи можно разделить на четыре этапа:

первый – возникновение трудностей, противоречия;

второй – выработка гипотезы, построение проекта решения задачи;

третий– осуществление плана решения задачи;

четвертый– практическая и теоретическая проверка решения задачи.

Успех в решении задачи во многом определяется тем, насколько правильно осуществляются мыслительные операции, как используются различные формы и виды мышления.

Проанализировав труды Л.М. Веккера, Л.С. Выготского, С.Л. Рубинштейна, Д.Б. Эльконина, Р. С. Немова др., посвященных проблеме психологии мышления, можем сказать, что в современной психологии наиболее распространена классификация видов мышления по следующим основаниям:

1) по генезису развития;
2) по характеру решаемых задач;
3) по степени развернутости;
4) по степени новизны оригинальности;
5) по средствам мышления;
6) по функциям мышления;
7) по типу познания и т.д.

Рассмотрев особенности каждого из данных видов мышления, отметим, что каждый вид мышления является носителем свойств, имеющихся и в других видах мышления. Так, например разработанное в психологии положение о видах мышления (В.В. Давыдов) позволило Р.А. Атаханов сделать вывод о том, что математическое мышление содержит эмпирическое и теоретическое мышление: так как математическое мышление, ориентированное на нахождение существенного в изучаемых явлениях, также опирается на усвоение и запоминание математических знаний, формирование соответствующих умений и навыков. А они прежде всего используются в качестве исходного материала мысли для выявления существенных отношений в данных объектах, что затем можно применить для решения новых задач. В этом смысле математическое мышление заключается в непосредственном или опосредствованном переходе от эмпирического мышления к теоретическому. Однако следует отметить, что при таком подходе данный тип мышления наделяют качествами, которые фактически определяют характеристику мышления не только в математической, но и во многих других предметных областях. Вместе с тем эта разновидность мышления имеет свои специфические черты и особенности, которые обусловлены спецификой изучаемых при этом объектов.

Проанализировав труды различных авторов посвященных изучению сущности математического мышления, отметим следующие существенные моменты:

В математическом мышлении различают два основных процесса: *постановку проблемы* и *ее решение.*

Первый процесс никогда не упрощается до произвольного выбора. Так, например, мы не можем считать сложной научной проблемой – процесс поиска решения ряда простых задач. Взятая для решения проблема не выбирается, а скорей разыскивается. Ценностью для науки она становиться только тогда, когда она полезна для нее.

Одним из основных условий для успешной постановки проблемы является творческое воображение. Оценка проблемы предполагает иногда как бы наперед ее решение. Прежде чем утверждать, что какое-либо положение служит связующим звеном двух других положений, следует знать это положение. Так, например, относительно положения: «все. В есть *D*», мы не можем утверждать, что его связывает положение «А есть В и А есть *С*», раньше чем не узнаем, что все «*D* есть *С*». Таким образом, уже при выборе проблемы иногда необходимо выдвигать *гипотезу*.

Процесс поиска решения исследуемой проблемы всегда начинается с составления *гипотетического плана ее решения,* разбивки ее на несколько частных вопросов, решение которых, по нашему расчету, приводит нас к решению интересующей нас проблемы. Так, при решении геометрической задачи на определение какой-либо геометрической величины через другие, мы рассчитываем прийти к определению неизвестного через последовательное определение других неизвестных. Приступая к решению первого вопроса, а затем, в случае удачи, второго и всех остальных вопросов, мы первым делом *прибегаем к памяти, стараясь подвести его, как частный случай, под уже известные нам проблемы.*

Только в случае неудачи, которая может явиться следствием, как недостаточного запаса познаний, так и отсутствия вполне подходящих методов на современной стадии развития науки, мы приступаем к самостоятельному поиску решения. Если мы теперь проанализируем эти поиски, *то увидим, что закулисная, сторона точного мышления носит совсем другой* *характер, чем тот ряд теорем в готовом и законченном виде, каждый член которого, не колеблясь, тянет последующие.*

Проникновение вглубь той или иной проблемы, стоящей перед человеком, рассмотрение свойств, составляющих эту проблему элементов, нахождение решения задачи осуществляется человеком при помощи мыслительных операций как: анализ; синтез; абстрагирование; обобщение; индукция; дедукция; аналогия и др.

Аналогичные операции мышления выделяют и в математическом мышлении. В исследовательской работе, нами проанализированы данные операции мышления как методы научного познания, применяемые при решении математических задач и доказательстве утверждений, теорем.

Рассмотрим вкратце сущность основных методов научного познания применяемых в математике:

Аналогия- прием познания, при котором на основе сходства объектов в одних признаках предполагают об их сходстве и в других признаках.

Умение находить сходство, является главным источником плодотворных рассуждений по аналогии, однако часто бывает нелегко находить сходство между сравниваемыми объектами,

Приведем пример: Решить уравнение

.

Решая, данное уравнение, по аналогии с уравнением

,

можно получим неверное решение:

Таким образом, если видеть только сходство и не замечать различия, то можно прийти к неверным выводу, решению. В то время как правильное решение должно быть таким:

Поэтому следует помнить, что в некоторых случаях заключение по аналогии является лишь правдоподобием и поэтому подлежит еще доказательству (или опровержению). Например, исходя из того, что предложение a || b и a || c => b || c (1) верно (является теоремой) и на плоскости и в пространстве, а обратное предложение a || c и b || c => a || b (2) верно на плоскости (является теоремой планиметрии), по аналогии утверждают, что предложение (2) верно и в пространстве, и приходят, таким образом, к ложному заключению.

Исходя из истинности предложения (2) на плоскости, необходимо выяснить, имеет ли место аналогичное свойство в пространстве. Так как это предложение является общим, то для его опровержения достаточно найти такие прямые a, b, c, чтобы условие (a||cиb||c) выполнялось, а заключение (a || b) не выполнялось.

Однако, не нужно опасаться возникновения ложных заключений по аналогии.Необходимо считать их гипотезами (предположениями). Ошибки,допускаемые в процессе поиска, вполне допустимы, так как чаще всего поиск ведется методом «проб и ошибок».

Рассматривая процесс построения суждений по аналогии можно заметить, что механизм ее умственного применения сложен и диалектичен по своей сути, так как сочетает в себе элементы дедукции и индукции, анализа и синтеза.

Анализ и синтез практически неотделимы друг от друга и составляют единый аналитико-синтетический метод, но мы их рассмотрим в отдельности друг от друга, чтобы наиболее выпукло показать особенности каждого метода.

Доказательство математического предложения $\forall x \in M$: $A(x) \Rightarrow B(x)$ называется *синтетическим,* если оно осуществляется по следующей логической схеме:

$$(A(x) \wedge T) \Rightarrow B_1(x) \Rightarrow B_2(x) \Rightarrow \ldots \Rightarrow B_n(x) \Rightarrow \Rightarrow B(x),$$

где T–определенная совокупность предложений той математической теории, в рамках которой доказывается данное предложение и которой принадлежат $B_1(x)$, $B_2(x)$, ..., $B_n(x)$, составляющих доказательство, а также суждения $A(x)$ и $B(x)$.

Таким образом, при синтетическом методе доказательства теоремы цепочка силлогизмов строится так, что мысль движется от условия теоремы к ее заключению.

К достоинствам синтетического метода следует отнести: сжатость, краткость, исчерпывающая полнота, логическая безупречность образца рассуждений.

При *аналитическом* доказательстве теоремы $\forall x \in M$: $A(x) \Rightarrow B(x)$ цепочка силлогизмов строится так, что мысль движется от заключения теоремы к ее условию. Различают два вида аналитического метода:

1)восходящий анализ (анализ Паппа);

2) нисходящий анализ (анализ Евклида).

Восходящим анализом (совершенным анализом) называется такая разновидность аналитического метода, при которой, отправляясь от заключения, подбирают для него достаточное условие – такое суждение $B_1(x)$, что $B_1(x) \Rightarrow B(x)$, затем подбирают достаточное условие $B_2(x)$ для $B_1(x)$, такое чтобы $B_2(x) \Rightarrow B_1(x)$ было истинным, и так далее до тех пор, пока не получат такое достаточное условие $B_n(x)$ для $B_{n-1}(x)$, что $B_n(x) \Rightarrow B_{n-1}(x)$ и $B_n(x)$ выполняется (истинно). При этом используются как условие $A(x)$ доказываемого предложения, так и некоторая совокупность T связанных с $A(x)$ и $B(x)$ предложений данной теории, истинность которых уже была установлена.

Сущность метода восходящего анализа состоит в том, что рассуждения строятся по схеме: для того, чтобы $B_n(x)$ было верно, достаточно, чтобы было верно $B(x)$ и т.д.

Нисходящим анализом (несовершенным анализом) называют такую разновидность аналитического метода, при которой, отправляясь от заключения $B(x)$ доказываемого предложения $A(x) \Rightarrow B(x)$, рассуждения ведут путем последовательного получения логических следствий:

$$B(x) \Rightarrow B_1(x) \Rightarrow B_2(x) \Rightarrow \ldots \Rightarrow B_n(x),$$

где $B_n(x)$ есть предложение, истинное значение которого нам точно известно. При выведении следствий из $B(x)$ временно допускают, что оно истинно.

При нисходящем анализе рассуждения также, как и при восходящем анализе, ведут от заключения теоремы, но подбирают уже не достаточные, а необходимые условия.

Основной особенностью данных методов является то, что они позволяют расчленить и соединить в единое целое изучаемый объект, анализировать все пути решения той или иной задачи. В научном познании частным случаем анализа является дедуктивный метод, а частным случаем синтеза – индуктивный метод. При этом чаще анализ и синтез используются как приемы мышления, а индукция и дедукция как методы.

Индукция (от латинского «inductio» - наведение) – метод рассуждений от частного к общему, вывод заключения из рассмотрения частных случаев и последующего распространения замеченных закономерностей на общий случай.

Дедукция (от латинского «deductio» - выведение) – переход от общего к частному, т.е. рассуждение, исходным моментом которого является общее утверждение, а заключительным моментом – частный вывод.

Индуктивное умозаключение в математике не считается методом строго доказательства, но является мощным эвристическим методом открытия новых истин.

Например, рассматривая четные числа, большие двух, замечаем, что каждое из них является суммой двух простых чисел:

4=2+2, 6=3+3, 8=3+5, 10=3+7, 12= 5+7,
14=7+7, 16=3+13, 18= 5+13, 20= 3+17, 22= 17+5 и т.д.

Это наблюдение приводит к гипотезе, что любое четное число, большее 2, является суммой двух простых чисел. Однако, не смотря на усилия многих выдающихся математиков, это утверждение, называемое *гипотезой Гольдбаха* (по имени немецкого математика XVIII в. Христиана Гольбаха), до сих пор не доказано в общем виде. Наиболее сильный результат в этом направлении получил советский математик академик И.М. Виноградов, доказавший, что любое достаточно большое четное число является суммой четырех простых чисел.

Следует отметить, что индуктивные рассуждения могут привести к ошибочным выводам.

Так, рассматривая числа вида , французский математик XVII в. Пьер Ферма заметил, что при *n=1,2,3,4* получаются простые числа. Он предположил, что все числа такого вида простые. Однако, крупнейший математик XVIII в. Леонард Эйлер нашел, что уже при *n=5* число $2^{32}+1$ не является простым: оно делится на 641.

Дедуктивное же умозаключение основывается на рассмотрении какое-либо явление, предмета, затем исходя из общеизвестного факта, положения, в отношении к данному явлению, предмету выводиться необходимое заключение.

Формой дедуктивных умозаключений, используемых при доказательстве теорем, является силлогизм. В силлогизме содержится три понятия, а состоит он из двух посылок и вывода. Его структуру можно представить в следующем виде:

Все *М* есть *Р* – большая посылка (БМ);

К есть *М* – меньшая посылка (МП);

К есть *Р* – вывод.

Приведем пример силлогизма: «Все ромбы *(М)* есть параллелограммы *(Р)*. Квадрат *(К)* есть ромб *(М).* Следовательно, квадрат *(К)* есть параллелограмм (Р).

Таким образом, во всех случаях, когда определенный, конкретный факт мы подводим под общеизвестное положение, а затем из него выводим какое-то заключение в отношении этого конкретного факта, мы умозаключаем в форме дедукции. Причем правильность дедуктивных выводов напрямую зависят от истинности посылок и от того, насколько строго мы придерживались дедуктивных правил.

В современном научном познании методы индукции и дедукции тесно взаимосвязаны друг с другом. Однако в математике между ними существует принципиальное различие, которое заключается в следующем:

В дедуктивном умозаключении истинность начальных посылок гарантирует достоверность конечного вывода, а в случае индукции такой гарантии нет: при достоверных начальных посылках возможен ложный вывод, так как здесь ключевым моментом является не только истинность начальных посылок, но и их количество. Если количество рассмотренных единичных фактов, которые подвергаются индуктивному обобщению, недостаточно, то высока вероятность сделать ошибочное умозаключение. С другой стороны, при достаточном количестве рассмотренных посылок вполне возможно получить достоверное обобщение (вывод).

Таким образом, рассмотрев особенности методов научного познания в математике и их применение при решении математических задач, доказательстве утверждений, теорем отметим следующее: важным навыком в исследовательской деятельности специалиста-математика является умение правильно применять методы познания: анализ, синтез, абстрагирование, обобщение, индукцию, дедукцию, аналогию и др. Для решения поставленных задач. В единстве методов математики и заключается специфика математического мышления. Математический язык уникален, язык благодаря которому раскрываются, воссоздается, обобщается, и воспроизводиться научное знание. Изящество и ценность математической мысли – это четкость ее логики, красота конструкций в идеальном построении абстракции. Такое представление о математическом мышлении не является стандартным, однако оно служит основой для дальнейших исследований, ценных научных догадок, предположений, для выдвижения гипотез, без чего не может быть развитие науки, и в частности математики.

Список использованной литературы

1.Идеалы и нормы научного исследования. Минск, 1981.
2.Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Законы эволюции и самоорганизации сложных систем. М., 1994.
3.Кравец А.С. Методология науки. Воронеж, 1991.
5.Идеалы и нормы научного исследования. Минск, 1981.
6.Концепция самоорганизации. Становление нового образа научного мышления. М., 1994.