УДК515.2

Кривые второго порядка - как сечения поверхностей второго порядка по наперед заданным параметрам

Байдабеков Ауез Кенесбекович [1], Мурадов Шамид Каримович[2], Адилов Полат Адилович[3], Н.Э. Ташимов[4]

[1]доктор технических наук, профессор
Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева
[2]кандидат технических наук, профессор
Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами
[3]кандидат технических наук, доцент
Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами
[4]старший преподаватель
Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами

Аңдатпа. Бұл мақала бұрын көрсетілмеген жалпы жағдайда орналасқан екінші ретті беттерді қималарын алдын ала берілген радиустары арқылы айналма қималарын анықтауға жолы сипатталады (мысалы, үш осьті эллипсоид пен эллипстік параболоидты қарастырамыз).

Кілт сөздер: *Екінші ретті қисықтар, беттердің қимасы, қиюшы жазықтықтар, қисық сызықтар, беттердің қиылысуы, гиперболоидтар, эллипсоидтар, параболоидтар.*

Аннотация. В данной статье рассматриваются способы определения положении секущих плоскостей поверхностей второго порядка общего вида (на примере эллипсоида с тремя осями и эллиптического параболоида) по круговым сечениям наперед заданного радиуса.

Ключевые слова: *Кривые второго порядка, сечение поверхностей, секущие плоскости, кривые линии, пересечение поверхностей, гиперболоиды, эллипсоиды, параболоиды.*

Abstract. In given article are considered ways of the determination position secant planes of the surfaces of the second order of the general type (on example of the ellipsoid with three axises and elliptical parabolic) on circular sections forward given radius.

KeyWords: *Curves of the second order, section of surfaces, secants of the plane, curves, crossing of surfaces, hyperboloids, ellipsoids, paraboloids.*

Как известно, в технике и в быту часто встречается применение кривых линии и поверхностей второго порядка и по той же причине уделяется большое внимание к изучению способов образования и построения этих кривых линии. Поверхности 2-го порядка изучаются с целью применения в дальнейшем при конструировании различных механизмов в машиностроении и для проектирования в строительных сооружениях. Поэтому исследование и определение положения плоскостей, пересекающих поверхностей 2-го порядка по наперед заданным параметрам имеют немало важную роль для теоретических и практических исследований.

В данной статье рассматриваются способы определения положения секущей плоскости, пересекающих поверхностей второго порядка общего вида для получения окружности заданной формы. Прежде всего, важно выяснить, при каких случаях сечении поверхности 2-го порядка общего вида плоскостью получается окружность. Если некоторая плоскость Q пересекает данную поверхность 2-го порядка общего вида по окружностям радиуса R, то и всякая плоскость, параллельная плоскости Q пересекает эту поверхность по окружностям, только различного радиуса. Кроме того, если существует семейство плоскостей, пересекающее поверхности 2-го порядка общего вида по окружности, то существует еще одно семейство плоскостей (симметрично к первой относительно плоскости симметрии поверхности), также определяющих положения круговых сечений. Таким образом, на поверхностях 2-го порядка общего вида существует двухпараметрическое множество плоскостей, пересекающих поверхности 2-го порядка по окружностям. Среди этих плоскостей существуют такие плоскости, которые пересекают поверхности 2-го порядка по окружности - по наперед заданным радиусом R.

Среди поверхностей 2-го порядка общего вида как трехосный эллипсоид, эллиптический конус, эллиптические однополостный и двуполостный гиперболоиды, эллиптический параболоид и эллиптический цилиндр также имеют круговые сечения. Как известно в работе [1] графо-аналитическим методом рассмотрены способы определения положения фронтально-проектирующих плоскостей, пересекающих поверхностей 2-го порядка общего вида по наперед заданным параметрам формы эллипса. Поэтому, если параметры формы наперед заданного эллипса равны между собой ($2a_1=2b_1$), то можно определить значения K тангенса угла наклона кругового сечения к плоскости XOY и h, точки пересечения искомых плоскостей с осью OZ.

Рассмотрим положения плоскостей, пересекающих конкретные поверхности 2-го порядка общего вида по наперед заданным круговым сечениям.

1. Пусть задан трехосный эллипсоид вида (1):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z}{c^2}=1, \tag{1}$$

где $c>b>a$ и наперед заданная окружность с радиусом R, рисунок 1.

Так как, наперед заданная окружность является частным случаем эллипса, когда $a_1=b_1=R$ имеем возможность определить фронтально-проецирующих плоскостей, пересекающих трехосного эллипсоида (1) по наперед заданной окружности. При этом значения K и h определяются по формулам:

$$\text{к} = \frac{\text{c}}{\text{a}}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{c^2-b^2}} \text{ или } \alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{\text{c}}{\text{a}}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{c^2-b^2}} \tag{2}$$

$$h = \pm\frac{c}{b}\sqrt{\frac{c^2-a^2}{c^2-b^2}}(b^2-R^2) \tag{3}$$

Эти формулы определяют совокупность направления двух действительных плоскостей, проходящих через среднюю ось эллипсоида (1) и одинаково наклоненных по отношению к большой (или малой) оси поверхности (1).

Алгоритм построения. На фронтальной проекции эллипсоида (рисунок 1) через точку O_2 проводим след фронтально-проецирующей плоскости по вычисленному значению k из формулы (2), которая определяет направление круговых сечений поверхности (1). Затем радиусом $r=b$ с центром в точке O_2 проводим дугу окружности. При этом на фронтальном очерке эллипсоида определим точек A_2 и $\bar{A}_2$. Соединяя эти точки с точкой O_2, построим направления $n_2^{/}$ и $\bar{n}_2$ круговых сечений. Затем проводим сопряженное направлению $n_2^{/}$ направление следов плоскостей соответствующих круговых сечений. Из точки O_2 по обе стороны прямой n_2 отложим значения наперед заданного радиуса R. Через полученные точки B_2 и $B_2^{/}$, проводим прямые, параллельные прямой $n_2^{/}$ (сопряженное направлению n_2) и определим на фронтальном очерке точки M_2, N_2 и $M_2^{/}N_2^{/}$. Соединяя их, получаем положения плоскостей Q_2 и $Q_2^{/}$ пересекающих эллипсоид (1) по заданной окружности с радиусом R, при этом симметричные к плоскостям Q_2 и $Q_2^{/}$ плоскости $Г_2$ и $Г_2^{/}$ также пересекают эллипсоид по заданным окружностям с радиусом R. Таким образом, на трехосном эллипсоиде существуют четыре окружности с радиусом R. Необходимо отметить, что точки пересечения сопряженных направлений $n_2^{/}$ и $\bar{n}_2^{1}$ с поверхностью эллипсоида (1) называются точками закругления, или омбулическими точками поверхности (1). У трехосного эллипсоида их четыре.

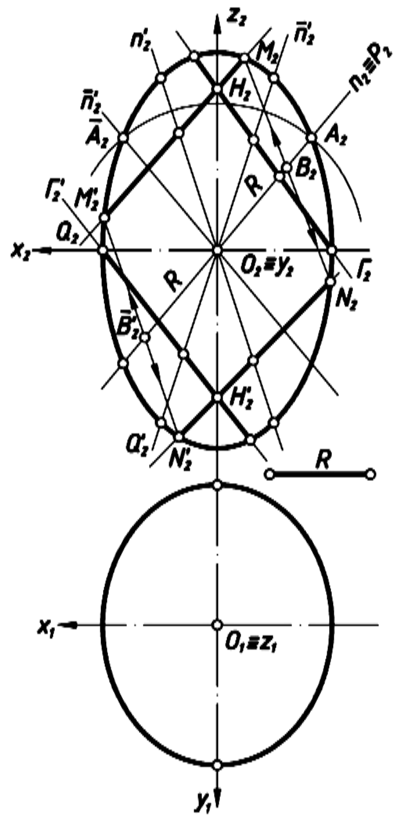

Рисунок 1

Если b (1) $a=b$, получим эллипсоид вращения, тогда $k=0$ или $\alpha=90^o$. Это означает, что круговые сечения поверхности эллипсоида вращения имеют одно направление. Следовательно, на поверхности эллипсоида вращения существуют две окружности наперед заданного радиусом R. Количество омбулических точек, будет равно двум. Они являются точками пересечения с осью вращения эллипсоида вращения.

Положения искомых плоскостей, пересекающих эллипсоид (1) по заданным окружностям, можно определить путем вычисления значений h по формуле (3). Вычисленные значения h откладываем от точки O_2 по обе стороны вертикальной оси поверхности. Через полученные точки H_2 и $H_2^/$ проводим следы фронтально-проецирующих плоскостей $Г_2$ и O_2, $Г_2^/$ и $Q_2^/$ под углом α к оси OX поверхности.

2. Пусть задан эллиптический параболоид

$$x^2/p + y^2/q = 2z, \tag{4}$$

где - $p<q$, наперед заданная окружность с радиусом R в соответствии с рисунком 2.

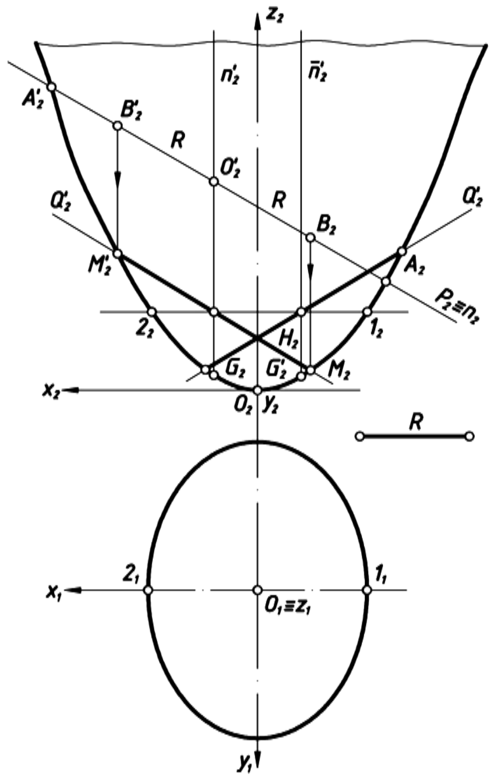

Рисунок 2

Необходимо определить положение плоскостей, пересекающих поверхность (4) по заданной окружности. Для этого, во-первых, определим направление плоскостей, пересекающих поверхности (4) по круговым сечениям. Затем из этого семейства выделим искомые плоскости, пересекающее, параболоид по наперед заданной окружности с радиусом R.

В работе [1], графа-аналитическим методом доказано определение положения фронтально-проецирующих плоскостей пересекающих эллиптического параболоида по эллипсу заданной формы. Если $a_1=b_1=R$, то получим

$$k=\sqrt{\frac{q-p}{p}} \quad \text{или} \quad \alpha=arctg\sqrt{\frac{q-p}{p}}, \tag{5}$$

При этом аппликаты точки пересечения искомых плоскостей с осью OZ, пересекающих поверхности (4) и по заданной окружности, радиус которой равен R, будут равны:

$$h=\frac{R^2-q^2+qp}{2q} \tag{6}$$

Отметим, что плоскости круговых сечений эллиптического параболоида параллельны большой оси нормального сечения поверхности (4).

Алгоритм построения. Вычисляя значения k по формуле (5) проводим след фронтально-проецирующей плоскости $p_2=n$. Затем делим хорду $A_2A_2^/$ фронтального очерка поверхности пополам и находим точку O_2^1. Через нее проходит сопряженное хорде $A_2A_2^/$ направление $n_2^/$ параллельно оси фронтального очерка поверхности. От точки O_2^1 по обе стороны прямой n_2 откладываем отрезки, равные R. Через полученные точки B_2 и $B_2^/$ проводим прямые параллельные $n_2^/$, и определим точки пересечения их с фронтальным очерком поверхности (4). Соединяя точки M_2 и $M_2^/$, находим положение плоскости Q_2, пересекающей эллиптический параболоид по окружности радиуса R, который наперед задан. Через точку H_2 (точку пересечения искомой плоскости с осью OZ) можно провести вторую плоскость O_2^1 симметрично первой относительно оси OZ, которая также пересекает поверхность на заданной окружности. Отметим, что положение искомых плоскостей можно определить путем вычисления значения по формуле, при этом значения $h_1^/$ откладываем от начала координат на оси OZ. Через полученную точку H_2 можно провести искомые плоскости под углом α к плоскости XOY. Необходимо отметить, что сопряженные направления n_2 и $n_2^/$ пересекают поверхность (4) в двух точках G_2 и $G_2^/$, которые являются омбулическими точками эллиптического параболоида. В случае параболоид вращения оба ряда круговых сечений сливаются в один. Сопряженные направления n_2 и $n_2^/$ совпадают с осью OZ. Тогда омбулической точкой поверхности будет вершина параболоида вращения.

Использованная литература

[1] Пересечения поверхностей 2-го порядка общего вида по эллипсу заданной формы /Вопросы естественных наук. –Ташкент. Бухарский гос пед. институт. № 18 (4), 1969.

[2] Михайленко В.Е. и другие. Сборник задач по начертательной геометрии. -Киев. «Вища» школа. 1976.

[3] Мурадов Ш.К. Сечения поверхности вращения второго порядка по заданному эллипсу. Сборник «Прикладная геометрия и инженерная графика». -Киев. Изд-во «Будівельник». № 5. 1967.