ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ БИКВАДРАТИЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Ауез Кенесбекович Байдабеков
доктор технических наук, профессор
Евразийского национального университета им. Л.Н.Гумилева

Түйіндеме

Берілген мақаланың негізгі нәтижесі – жазықтықты биквадратты түрлендірудің теориялық негіздерін және жаңа түрлерін қалыптасуы зертелген. Алғашқы рет жазықтықты биквадратты түрлендірудің туындау түрлерінің заңдылығы зерттелді.

Summary

The main result of this paper is to develop the theoretical foundations of modeling biquadratic transformations of the plane. First time the laws of designed biquadratic transformations of the plane was worked out. The spatial mapping maps the two surfaces of the second order, established new laws get four - four-correspondences between two planes and the misalignment of the theoretical modeling of canonical transformations biquadratic plane.

1. Введение. Из анализа научных работ по прикладной геометрии следует, что квадратичные преобразования плоскости исследованы достаточно полно и нашли применения в науке и технике. Однако исследованию и применению четыре – четырехзначных соответствий и биквадратичных преобразований плоскости уделено мало внимания.

В прикладной геометрии способ квадратичных преобразований эффективен при решении позиционных задач, связанных с кривыми или поверхностями. Использование квадратичного преобразования позволяет в два раза уменьшить порядок проектируемой кривой или поверхности, что значительно упрощает решение различных позиционных задач [1]. Недостаточно широкое применение квадратичных преобразований в прикладной геометрии объясняется тем, что способы квадратичных преобразований слабо разработаны, хотя исследованию этой проблемы, разработке графических моделей, применению их в прикладной геометрии посвящены десятки работ ведущих специалистов по прикладной геометрии.

Многозначные точечные геометрические преобразования могут быть одно-двузначными, одно-трехзначными, одно-четырехзначными и т.д. Из них одно-двузначные точечные преобразования исследованы достаточно полно.

Одним из создателей кремоновых (квадратичных) преобразований является Кремона Л. [1, 3]. Впервые им были собраны начальные сведения и даны основы классической теории нелинейных бирациональных (кремоновых) преобразований плоскости и трёхмерного пространства.

Хадсона Х.П. [2] в свой монографии дал более полный обзор основных вопросов классической теории нелинейных бирациональных преобразований плоскости и трёхмерного пространства. Профессором Скопецом З.А. [4] был предложен метод получения специальных кремоновых преобразований трехмерного пространства. Исследования Скопец З.А. посвящены изучению двух - двухзначного соответствия T_{2-2}.

2 Конструктивная схема установления биквадратичных преобразований между двумя несовмещенными плоскостями

Рассмотрим пространственную конструктивную схему установления четыре - четырехзначных соответствий между двумя несовмещенными плоскостями. Сущность получения четыре - четырехзначных соответствий между несовмещенными плоскостями $П_1$ и $П_2$ заключается в следующем:

1. В евклидовом трехмерном пространстве E_3 задаются две пересекающиеся алгебраические поверхности второго порядка Q_1^0 и Q_2^0. А также задаются две плоскости проекции общего положения $П_1$ и $П_2$ в соответствии с рисунком 2.1.

2. Проводим проецирующий луч S_1, который пересекает заданные поверхности Q_1^0 и Q_2^0 соответственно в точках A_1^0 и A_2^0, A_3^0 и A_4^0.

3. Поверхность второго порядка Q_1^0 вращаем вокруг оси OX_2 на 90^0 так, чтобы положительное направление оси OX_1 совпадало с отрицательным направлением оси OX_3 (рисунок 2.1.)

Получим новое положение Q_1^{01} поверхности второго порядка Q_1^0 и точки A_1^{01} и A_2^{01}, которые соответствуют точкам A_1^0 и A_2^0.

Точки A_1^{01} и A_2^{01} проецируем проецирующим лучом S_2 на плоскость $П_2$, получим точки A_1 и A_2 (рисунок 2.1.)

4. Вращаем вокруг оси OX_1 на 90^0 вторую поверхность второго порядка Q_2^0 так, чтобы положительное направление оси OX_2 совпадало с отрицательным направлением оси OX_3 в соответствии с рисунком 2.1. Получим новое положение Q_2^{01} поверхности второго порядка Q_2^0 и точки A_3^{01}, A_4^{01}, которые соответствуют точкам, A_3^0 и A_4^0. Проецируем точки A_3^{01} и A_4^{01} проецирующим лучом S_2 на плоскость $П_2$, получим точки A_3 и A_4, (рисунок 2.1.)

5. Проводим через точки A_1 и A_2 прямые параллельные оси OX_2. Также проводим через точки A_3 и A_4 прямые параллельные оси OX_1. Эти четыре прямые линии пересекаются между собой в точках $A_1^/$, $A_2^/$ и $A_3^/$, $A_4^/$ в соответствии с рисунком 2.1.

Таким образом, в результате последовательного выполнения выше изложенного конструктивного аппарата точке A плоскости $П_1$ соответствуют четыре точки $A_1^/$, $A_2^/$, $A_3^/$, $A_4^/$ плоскости $П_2$, то есть устанавливается четыре-четырехзначное соответствие между несовмещенными плоскостями $П_1$ и $П_2$.

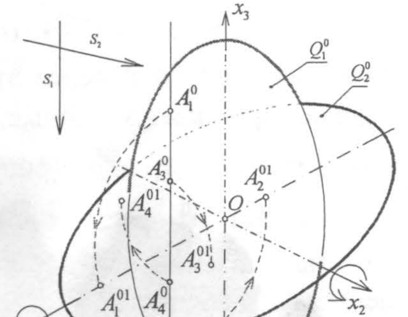

Рисунок 2.1- Пространственная конструктивная схема

Аналогично точке B плоскости $П_2$ соответствуют точки B_1', B_2', B_3', B_4' плоскости $П_1$, то есть устанавливается обратное четыре - четырехзначное соответствие между несовмещенными плоскостями $П_2$ и $П_1$. Теперь рассмотрим (4-4)–значное преобразование между совмещенными плоскостями, которое названо нами биквадратичным преобразованием плоскости.

2.1 Метод получения канонических биквадратичных преобразований плоскости

Сущность предлагаемого метода моделирования биквадратичных преобразований плоскости, порождаемых бинарным отображением двух поверхностей второго порядка, заключается в следующем.

В евклидовом трехмерном пространстве E_3 задаются две поверхности второго порядка Φ_1^0 и Φ_2^0, уравнения которых имеют вид:

$$\Phi_1^0\left(x_1, x_2, x_3\right) = 0, \tag{2.2.1}$$

$$\Phi_2^0\left(x_1, x_2, x_3\right) = 0, \tag{2.2.2}$$

где x_1, x_2, x_3 - декартовые координаты;

Φ_1^0, Φ_2^0 – непрерывные многочлены второго порядка.

На плоскости $П_1$ отметим точку A и через эту точку проведём вертикальный луч S, который пересекает заданные поверхности Φ_1^0 и Φ_2^0 соответственно в точках A_1^0 и A_2^0, A_3^0 и A_4^0 (рисунок 2.1.).

Поверхность второго порядка Φ_1^0 вращаем вокруг оси ординаты так, чтобы положительное направление оси аппликаты совпадало с положительным направлением оси абсциссы.

Другими словами, поверхность второго порядка Φ_1^0 подвергается пространственному преобразованию γ_1 (вращению вокруг оси ординаты под углом 90^0), матрица которого задается уравнением

$$\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \\ X_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}. \tag{2.2.3}$$

Получим новое положение поверхности второго порядка Φ_1^0 и точки A_1^{01}, A_2^{01}, которые соответствуют точкам A_1^0 и A_2^0. Точки A_1^{01} и A_2^{01} проецируем вертикальными лучами на плоскость Π_1, получим точки A_1 и A_2.

Вращаем вокруг оси абсциссы вторую поверхность второго порядка Φ_2^0 так, чтобы положительное направление оси аппликаты совпадало с положительным направлением оси ординаты.

Таким образом, поверхность Φ_2^0 подвергаем пространственному преобразованию γ_2, заданному матричным уравнением:

$$\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \\ X_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}. \tag{2.2.4}$$

После преобразования получим новое положение поверхности второго порядка Φ_2^0 и точки A_3^{01}, A_4^{01}, которые соответствуют точкам, A_3^0 и A_4^0. Проецируем точки A_3^{01} и A_4^{01} вертикальными лучами на плоскость Π_1, получим точки A_3 и A_4.

Через точки A_1, A_2 и A_3, A_4 проводим прямые, параллельные соответственно осям координат OX_2, OX_1. Получим четырехугольник с вершинами A_1', A_2' и A_3', A_4'.

В результате последовательного выполнения выше изложенного конструктивного аппарата, каждая точка A плоскости Π_1 преобразуется в четыре точки A_1', A_2' и A_3', A_4' плоскости Π_1'.

Учитывая двух параметрическое множество точек совмещенной плоскости $\Pi_1' \equiv \Pi_1$ получим биквадратичное преобразование плоскости, обозначенное буквой L. Аналогичным образом можно показать, что в обратном направлении каждая точка A' плоскости Π_1' преобразуется в четыре точки плоскости Π_1. Это преобразование обозначим буквой L'.

Выше изложенное дает нам возможность сформировать следующую теорему:

Теорема: *Если задаются две поверхности вращения Φ_1^0 и Φ_2^0, которые соответственно подвергаются пространственным преобразованиям γ_1 и γ_2, и они отображаются по направлениям s и $s^/$ на плоскость $\Pi_1^/ \equiv \Pi_1$, то устанавливается биквадратичное преобразование L и $L^/$ между совмещенными плоскостями $\Pi_1^/ \equiv \Pi_1$.*

С использованием предложенной выше пространственной конструктивной схемы получим различные виды канонических биквадратичных преобразований $L, L^/$ плоскости, рассматриваемые в следующем подразделе.

2.2 Разработка канонических биквадратичных преобразований плоскости

Для того, чтобы получить биквадратичные преобразования плоскости бинарно отображены на плоскость две поверхности второго порядка. При этом рассматриваем три случая: а) сочетания нелинейчатых поверхностей второго порядка; б) сочетания конических и цилиндрических поверхностей второго порядка; в) сочетания однополостных гиперболоидов второго порядка. В результате реализации этих случаев получили три подгруппы биквадратичных преобразований плоскости.

2.2.1 Биквадратичные преобразования плоскости, пораждаемые бинарным отображением двух нелинейчатых поверхностей 2-го порядка

Для моделирования первой подгруппы биквадратичных преобразований плоскости, в выше изложенной пространственной конструктивной схеме рассматриваем случай, когда сочетание бинарно отображенных поверхностей второго порядка является нелинейчатые поверхности 2-го порядка, такие как сфера и двуполостный гиперболоид.

Зададим перечень нелинейчатых поверхностей второго порядка таких как сферу, двухполосный гиперболоид по оси x, y и z, служащие по парно элементами пространственной конструктивной схемы. Из этих четырех поверхностей созданы двенадцать вариантов сочетаний отображаемых поверхностей Φ_1^0 и Φ_2^0.

Проведенные исследования показали, что образуют вырожденные (4-4)-значные соответствия плоскости, а двухполосный гиперболоид по оси x, и z, позволили получить четыре вида канонических биквадратичных преобразований плоскости L и L'.

Рассмотрим пример моделирования биквадратичного преобразования плоскости, когда первая поверхность Φ_1^0 является двуполостным гиперболоидом с действительной осью OX_3, а вторая поверхность Φ_2^0 является двуполостным гиперболоидом с действительной осью OX_1.

Согласно методу, предложенному в подразделе 2.2, поверхность Φ_1^0 подвергается преобразованию

$$\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \\ X_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, \qquad (2.3.1)$$

и затем ортогонально отображается на плоскость проекций Π_1.

Поверхность Φ_2^0 подвергается преобразованию

$$\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \\ X_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, \qquad (2..3.2)$$

и затем ортогонально отображается на плоскость проекций Π_1'.

В результате выполнения вышеизложенного метода, каждая точка плоскости Π_1 преобразуется в четыре точки плоскости Π_1'. Учитывая двух - параметрическое множество точек совмещенной плоскости $\Pi_1' \equiv \Pi_1$, получим биквадратичное преобразование плоскости. Аналогичным образом можно показать, что в обратном направлении каждая точка плоскости Π_1' преобразуется в четыре точки плоскости Π_1.

2.3.2 Биквадратичные преобразования плоскости, порождаемые бинарным отображением конических и цилиндрических поверхностей второго порядка

Для моделирования второй подгруппы биквадратичных преобразований плоскости рассматриваем случай, когда сочетание бинарно отображенных поверхностей второго порядка являются линейчатые поверхности 2-го порядка, такие как коническая и цилиндрическая поверхности вращения.

Из этих поверхностей созданы тринадцать вариантов сочетаний отображаемых поверхностей Φ_1^0 и Φ_2^0.

Исследования показали, что пункты с порядковыми номерами от *2* до *4*-го, *6*-го и от *9* до *13*-го образуют вырожденные (4-4)-значные соответствия плоскости, а пункты с порядковыми номерами *1, 5, 7* и *8* позволили получить четыре вида канонических биквадратичных преобразований L и L'.

Рассмотрим пример моделирования биквадратичного преобразования плоскости, когда первой поверхностью Φ_1^0 является круглый конус с действительной осью OX_1, а второй поверхностью Φ_2^0 является круглый конус с действительной осью OX_3.

Согласно методу, предложенному в подразделе 2.2, поверхность второго порядка Φ_1^0 вращаем вокруг оси OX_1 так, чтобы положительное направление оси OX_3 совпадало с положительным направлением оси OX_1. Другими словами, коническая поверхность второго порядка Φ_2^0 подвергается преобразованию вращения вокруг оси OX_1

$$\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \\ X_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, \qquad (2.3.3)$$

и затем ортогонально отображается на плоскость проекций Π_1.

Коническую поверхность второго порядка Φ_2^0 вращаем вокруг оси OX_1 так, чтобы положительное направление оси OX_3 совпадало с положительным направлением оси OX_2. Иначе говоря, поверхность Φ_2^0 подвергаем преобразованию вращения на 90^0

$$\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \\ X_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, \qquad (2.3.4)$$

и затем ортогонально отображаем на плоскости проекции $\Pi_1^{/}$.

В результате последовательного выполнения вышеизложенного метода, каждая точка плоскости Π_1 преобразуется в четыре точки плоскости $\Pi_1^{/}$. Учитывая двух - параметрическое множество точек совмещенной плоскости $\Pi_1^{/} \equiv \Pi_1$, получим биквадратичное преобразование плоскости. Аналогичным образом можно показать, что в обратном направлении каждая точка плоскости $\Pi_1^{/}$ преобразуется в четыре точки плоскости Π_1.

2.2.3 Биквадратичные преобразования плоскости, порождаемые бинарным отображением двух линейчатых гиперболических поверхностей 2-го порядка

Для моделирования третьей подгруппы биквадратичных преобразований плоскости, рассмотрим случай, когда сочетание бинарно отображенных поверхностей второго порядка являются нелинейчатые поверхности 2-го порядка, такие как сфера и двуполостный гиперболоид.

Из этих семи поверхностей созданы двадцать два варианта сочетаний отображаемых поверхностей Φ_1^0 и Φ_2^0.

Проведенные исследования показали, что с порядковыми номерами 3, 4, 6, 7, 8, 10 и от 11-го до 22-го образуют вырожденные (4-4)-значные соответствия плоскости, а с порядковыми номерами 1, 2, 5 и 9 позволили получить четыре вида канонических биквадратичных преобразования плоскости L и $L^{/}$.

Рассмотрим пример моделирования биквадратичного преобразования плоскости, когда первая поверхность Φ_1^0 является однополостным гиперболоидом с действительной осью OX_3, а вторая поверхность Φ_2^0 является однополостным гиперболоидом с действительной осью OX_1.

Согласно методу, предложенному в подразделе 2.2, поверхность Φ_1^0 подвергается преобразованию вращения на 90^0

$$\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \\ X_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}. \qquad (2.3.7)$$

и затем ортогонально отображается на плоскости проекции $\Pi_1^/$.

Поверхность второго порядка Φ_2^0 вращаем вокруг оси OX_1 так, чтобы положительное направление оси OX_3 совпадало с положительным направлением оси OX_2. То есть поверхность Φ_2^0 подвергаем преобразованию, заданному матричным уравнением (2.3.8) и затем ортогонально отображаем на плоскости проекции $\Pi_1^/$.

$$\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \\ X_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}. \qquad (2.3.8)$$

В результате последовательного выполнения вышеизложенного конструктивного аппарата, каждая точка плоскости Π_1 преобразуется в четыре точки плоскости $\Pi_1^/$. Таким образом, в двух параметрическом множестве точек плоскости $\Pi_1^/ \equiv \Pi_1$ получим биквадратичное преобразование плоскости L. Аналогичным образом можно показать, что в обратном направлении каждая точка $A^/$ плоскости $\Pi_1^/$ преобразуется в четыре точки плоскости Π, это будет обратное преобразование $L^/$.

2.3 Определения уравнения канонических биквадратичных преобразований плоскости

Биквадратичные преобразования плоскости являются взаимно (1-4)- значными соответствиями между точками двух плоскостей Π_1 и $\Pi_1^/$.

Уравнения прямого биквадратичного преобразования L определяются по следующему алгоритму. Уравнение

$$\Phi_1^0\left(x_1, x_2, x_3\right) = 0, \tag{2.2.1}$$

поверхности $\Phi_1{}^0$ перепишем в виде

$$x_3 = \varphi_1(x_1, x_2). \tag{2.3.1}$$

Поверхность второго порядка Φ_1^0 подвергается преобразованию вращения вокруг оси абсцисс под углом 90^0. Согласно уравнению (2.2.3), получим:

$$x_1^/ = x_3. \tag{2.3.2}$$

С учетом уравнения (2.4.1), из выражения (2.4.2) получим:

$$x_1^/ = \varphi_1(x_1, x_2) \tag{2.3.3}$$

Уравнения поверхности $\Phi_2{}^0$

$$\Phi_2^0\left(x_1, x_2, x_3\right) = 0, \tag{2.2.2}$$

перепишем в виде

$$x_3 = \varphi_2(x_1, x_2). \tag{2.3.4}$$

Поверхность второго порядка Φ_2^0 подвергается преобразованию вращения вокруг оси ординаты на 90^0. Согласно уравнению (2.2.4) получим:

$$x_2^/ = \varphi_2(x_1, x_2). \tag{2.3.5}$$

Объединив в одну систему выражения (2.4.3) и (2.4.5), получим искомые формулы прямого биквадратичного преобразования L:

$$\begin{cases} x_1^/ = \varphi_1(x_1, x_2), \\ x_2^/ = \varphi_2(x_1, x_2). \end{cases} \tag{2.3.6}$$

С использованием предложенного выше алгоритма получили уравнения канонических биквадратичных преобразований плоскости L в соответствии таблицей 2.1.

Таблица 2.1: Математические модели биквадратичных преобразований плоскости

Обозначение и уравнения L	**Обозначение и уравнения преобразований L^1**
$L_1:\begin{cases} x_1' = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + R^2} \\ x_2' = \sqrt{x_1^2 - x_2^2 - R^2} \end{cases}$	$L_1':\begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{x_1'^2 + x_2'^2}{2}} \\ x_2 = \sqrt{\dfrac{x_1'^2 - x_2'^2 - 2R^2}{2}} \end{cases}$
$L_2:\begin{cases} x_1' = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + R^2} \\ x_2^1 = \sqrt{x_2^2 - x_1^2 - R^2} \end{cases}$	$L_2':\begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{x_1'^2}{2} - \dfrac{x_2'^2}{2}} \\ x_2 = \sqrt{\dfrac{x_1'^2 + x_2'^2}{2}} \end{cases}$
$L_3:\begin{cases} x_1' = \sqrt{x_1^2 - x_2^2 - R^2} \\ x_2^1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + R^2} \end{cases}$	$L_3':\begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{x_1'^2}{2} + \dfrac{x_2'^2}{2}} \\ x_2 = \sqrt{\dfrac{x_2'^2 - 2R^2 - x_1'^2}{2}} \end{cases}$
$L_4:\begin{cases} x_1' = \sqrt{x_2^2 - x_1^2 - R^2} \\ x_2^1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + R^2} \end{cases}$	$L_4':\begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{x_2'^2}{2} - \dfrac{x_1'^2}{2} - R^2} \\ x_2 = \sqrt{\dfrac{x_2'^2 - x_1'^2}{2}} \end{cases}$
$L_5:\begin{cases} x_1' = \sqrt{x_1^2 - x_2^2} \\ x_2^1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{cases}$	$L_5':\begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{x_1'^2 + x_2'^2}{2}} \\ x_2 = \sqrt{\dfrac{x_2'^2 - x_1'^2}{2}} \end{cases}$
$L_6:\begin{cases} x_1' = \sqrt{x_2^2 - x_1^2} \\ x_2^1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{cases}$	$L_6':\begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{x_2'^2 - x_1'^2}{2}} \\ x_2 = \sqrt{\dfrac{x_2'^2 + x_1'^2}{2}} \end{cases}$
$L_7:\begin{cases} x_1' = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ x_2' = \sqrt{x_1^2 - x_2^2} \end{cases}$	$L_7':\begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{x_1'^2 + x_2'^2}{2}} \\ x_2 = \sqrt{\dfrac{x_1'^2 - x_2'^2}{2}} \end{cases}$

$L_8:\begin{cases} x_1' = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ x_2' = \sqrt{x_2^2 - x_1^2} \end{cases}$	$L_8':\begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{x_1'^2 - x_2'^2}{2}} \\ x_2 = \sqrt{\dfrac{x_1'^2 + x_2'^2}{2}} \end{cases}$
$L_9:\begin{cases} x_1' = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - R^2} \\ x_2' = \sqrt{x_1^2 - x_2^2 + R^2} \end{cases}$	$L_9':\begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{x_1'^2}{2} + \dfrac{x_2'^2}{2}} \\ x_2 = \sqrt{\dfrac{x_1'^2}{2} - \dfrac{x_2'^2}{2} + R^2} \end{cases}$
$L_{10}:\begin{cases} x_1' = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - R^2} \\ x_2' = \sqrt{x_2^2 - x_1^2 + R^2} \end{cases}$	$L_{10}':\begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{x_1'^2}{2} - \dfrac{x_2'^2}{2} + R^2} \\ x_2 = \sqrt{\dfrac{x_1'^2 + x_2'^2}{2}} \end{cases}$
$L_{11}:\begin{cases} x_1' = \sqrt{x_1^2 - x_2^2 + R^2} \\ x_2' = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - R^2} \end{cases}$	$L_{11}':\begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{x_1'^2}{2} + \dfrac{x_2'^2}{2}} \\ x_2 = \sqrt{\dfrac{x_2'^2}{2} - \dfrac{x_1'^2}{2} + R^2} \end{cases}$
$L_{12}:\begin{cases} x_1' = \sqrt{x_2^2 - x_1^2 + R^2} \\ x_2' = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - R^2} \end{cases}$	$L_{12}':\begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{x_2'^2}{2} - \dfrac{x_1'^2}{2} + R^2} \\ x_2 = \sqrt{\dfrac{x_2'^2 + x_1'^2}{2}} \end{cases}$

Список использованной литературы:

L. Cremon Sullen transformation geometric he dale figure plane //Gior. D. mat. 1863. №1, –pages 305-311.

2. H. Hudson. Cremona transformations in plane and space. Cambridge, 1927.-321 p.

3. Л. Кремона. Взаимные фигуры в графической статике. –Л.: ОРТИ, 1936 -250 с.

4. А. Скопец, Б.А. Розенфельд. Квадратичные кремоновые преобразования на плоскости и комплексные числа. –М.: ДАН, 1952. №83, стр. 801-804.