

## ЗАДАЧИ ЗАМКНУТОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ С ИЗМЕНЯЕМЫМИ КОНТУРАМИ

← **Канлыбаев Оразалы**

доктор технических наук, профессор  
Евразийского национального университета им. Л.Н.Гумилева

**Саткалиева Марфуга Оразалыевна**

доктор технических наук, профессор  
Евразийского национального университета им. Л.Н.Гумилева

**Ержан Заятович Галимов**

старший преподаватель  
Евразийского национального университета им. Л.Н.Гумилева

### Түйіндеме

Кеңістіктегі манипуляциялық құрылғыларды жобалауда пайдалану мақсатында кеңістіктегі тұтқыштық механизмнің параметрлерін анықтайтын аналитикалық әдіс ұсынылған. Синтез есебінің шешімдері және оның сандық нәтижелері берілген.

### Summary

The analytical method for determining the parameters of the space-lever mechanism for use in the design of spatial manipulation devices. The solutions of the synthesis problem with the numerical results.

Создание механизмов, воспроизводящих требуемые пространственные движения потребовало проектирование многофункциональных пространственных рычажных механизмов высоких классов для сложных устройств и машин, которые по сравнению с плоскими механизмами обладают большими возможностями. Использование пространственных рычажных механизмов высоких классов в манипуляционных устройствах, по сравнению с существующими антропоморных конструкциями роботов, повышает точность позиционирования и быстродействие вследствие большой жесткости, увеличивает грузоподъемность за счет распределения сил по контурным звеньям. Кроме того, в указанных

механизмах имеется возможность реализации сложных траекторий одного или нескольких рабочих органов, что значительно упрощает систему управления манипуляционными роботами, созданными на базе пространственных механизмов высоких классов. Несмотря на свои основные преимущества по сравнению с другими известными пространственными механизмами, указанные рычажные механизмы высоких классов имеют еще ограниченное распространение вследствие того, что синтез этих механизмов представляет собой весьма сложную задачу. В настоящей статье рассматривается уравнения замкнутости пространственного рычажного механизма V класса с двумя степенями свободы.

**Постановка задачи.** Синтез пространственных рычажных механизмов высоких классов со многими степенями свободы с низшими парами проводится путем разделения их кинематических цепей, представляющих собой сложные замкнутые векторные контуры, на отдельные замкнутые многоугольники, что позволяет свести решение сложной задачи к последовательному решению более простых задач [1]. Пространственный рычажный механизм V класса с двумя степенями свободы с низшими парами общего вида изображен на рисунке.

Механизм содержит основание, кривошипы 1,7 связанные посредством шарниров с приводами вращательных движений, звенья 3, 4, 6 выполненные в виде треугольников, которые одними вершинами связаны посредством шарниров соответственно с кривошипом 7, звеном 2 и со стойкой в точке D, а остальными вершинами соединены между собой посредством сферических и сферических с пальцем шарниров звеньями 5 и 8.

Движение приводов вращательных движений, расположенных на основании через кривошипы 1,7 передается к шатуну, состоящему из трех треугольников 3,4,6 и рычагов 5,8 выполненных в виде пятисторонней изменяемой замкнутой системы, представляющей собой группу Ассур V класса. В качестве входных звеньев приняты звенья 1, 7, которые представлены в виде кривошипов. Обозначим через  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  углы, определяющие положения кривошипов 1, 7 вращающихся вокруг неподвижных осей и примем их в качестве независимых переменных углов.

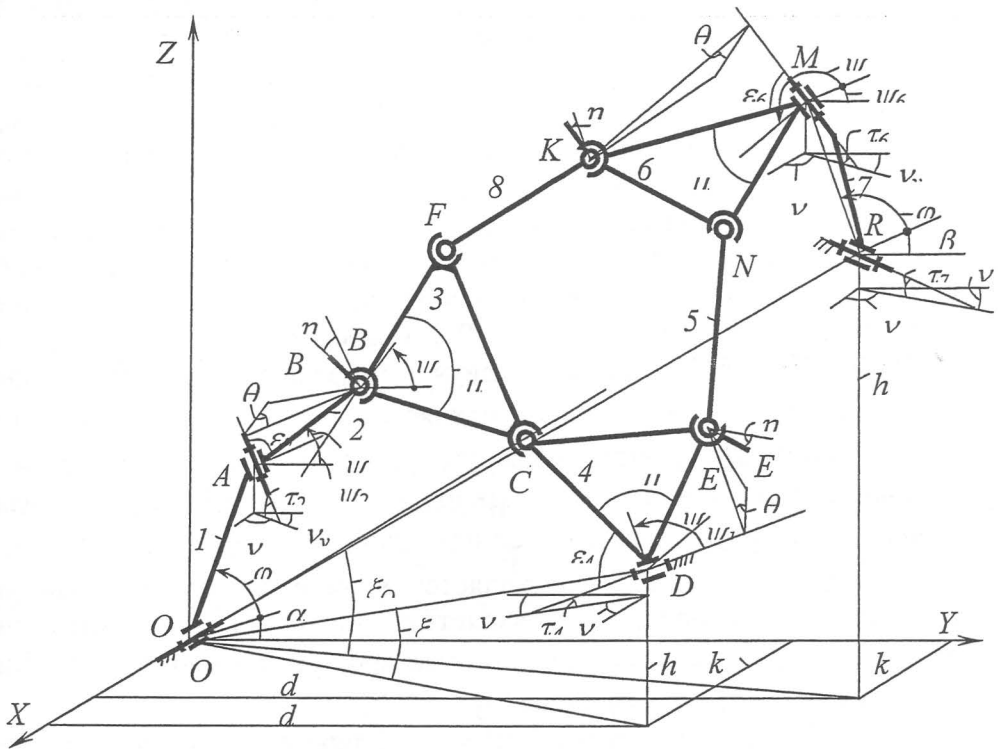


Рисунок - Пространственный рычажный механизм V класса с двумя степенями свободы

В число постоянных параметров входят: относительные длины звеньев, параметры, координирующие положение стойки звеньев 1,7, параметры определяющие начало отсчета углов поворота звеньев 1, 7,  $\alpha$  и  $\beta$ . Следует отнести к указанным параметрам углы одной из вершин треугольных звеньев 3,4,6 в точках их присоединения с другими звеньями. Для определенности движения звеньев 2,4,6 заданы углы образуемые соответствующими сторонами указанных звеньев и осями шарниров в точках  $A, D, M$ . Кроме того, для механизма общего вида должны быть заданы углы  $\nu, \tau$  наклона шарниров соответствующих звеньев 2, 4, 6, 7 на оси прямоугольной системы координат. Таким образом, общее количество постоянных параметров механизма равно семнадцати.

Кинематическая схема пространственного механизма представляет собой сложный замкнутый векторный контур и состоит

из трех замкнутых многоугольников  $OABCD$ ,  $OABFKMRO$ ,  $DENMRD$  общими сторонами которых являются  $OA$ ,  $AB$ ,  $MR$ . Замкнутый векторный контур представляет собой изменяющийся замкнутый многоугольник, но при его изменениях линии действия его векторов постоянно должны пересекаться, так как в противном случае нарушается поставленное условие замкнутости рассматриваемого контура. Как указано выше, синтез каждого замкнутого многоугольника сложного замкнутого векторного контура проводится по отдельности с условием выполнения замкнутости сложного векторного контура механизма. Рассматриваемый механизм воспроизводит функцию двух независимых переменных  $\psi_{\text{мех}} = F(\varphi_1, \varphi_2)$ , который определяется семнадцатью постоянными параметрами. Параметры механизма должны быть определены из условия приближения к нулю отклонения  $\Delta$ , в заданных интервалах изменения независимых переменных углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Зависимость  $\Delta$  от искомых размеров представляется в виде сложного выражения, поэтому целесообразным является использование выражения взвешенной разности  $\Delta q$  для синтеза пространственных механизмов со многими степенями свободы [2].

1. Рассмотрим замкнутый многоугольник  $OABCD$  (рисунок). В качестве взвешенной разности примем величину:

$$\Delta q = l_3^2 - l_{3\phi}^2, \quad (1)$$

Обозначим через  $l_{3\phi}$  расстояние между точками  $B$  и  $C$ , которое получается при заданных значениях независимых переменных углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Зависимость величины  $l_{3\phi}$  от искомых параметров кинематической схемы определяется известными двенадцатью параметрами механизма, входящими в выражения координат точек  $B$  и  $C$ . Вычислению подлежат пять параметров  $d_D$ ,  $k_D$ ,  $h_D$ ,  $l_3$ ,  $l_{4CD}$  механизма.

**Вычисление пяти параметров.** Для вычисления пяти параметров  $d_D$ ,  $k_D$ ,  $h_D$ ,  $l_3$ ,  $l_{4CD}$  представим выражение (1) в виде:

$$\Delta q = p_1 f_1(\varphi_1, \varphi_2) + p_2 f_2(\varphi_1, \varphi_2) + p_3 f_3(\varphi_1, \varphi_2) + p_4 f_4(\varphi_1, \varphi_2) + p_5 f_5(\varphi_1, \varphi_2) + p_6 f_6(\varphi_1, \varphi_2) + p_7 f_7(\varphi_1, \varphi_2) - F(\varphi_1, \varphi_2), \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 \text{где} \quad f_1(\varphi_1, \varphi_2) &= -2l_1 \cos \varphi_1; & f_2(\varphi_1, \varphi_2) &= -2l_2; \\
 f_3(\varphi_1, \varphi_2) &= -2l_1 \sin \varphi_1; \\
 f_4(\varphi_1, \varphi_2) &= -2l_1 \cos \varphi_1 \cos \bar{\psi}_1 - 2l_2 \sin \bar{\psi}_1; \\
 f_5(\varphi_1, \varphi_2) &= 1; & f_6(\varphi_1, \varphi_2) &= 2 \cos \bar{\psi}_1; \\
 f_7(\varphi_1, \varphi_2) &= 2 \sin \bar{\psi}_1; \\
 F(\varphi_1, \varphi_2) &= -l_1^2 - l_2^2; & & (3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_1 = x_D; & \quad p_2 = y_D; & p_3 = z_D; & \quad p_4 = l_4; \\
 p_5 = x_D^2 + y_D^2 + z_D^2 + l_4^2 - l_3^2; & \quad p_6 = p_1 p_4; & p_7 = p_2 p_4. & (4)
 \end{aligned}$$

При решении задачи по методу интерполирования выбираем пять точек в заданной области изменения углов  $\varphi_1, \varphi_2$  для которых отклонения, взвешенной разности  $\Delta q$  должны равняться нулю [3]. Обозначим значение углов  $\varphi_1, \varphi_2$  в этих точках через  $\varphi_{1i}, \varphi_{2i}$ , где  $i = \overline{1,5}$ .

Тогда

$$\begin{aligned}
 p_1 f_1(\varphi_{1i}, \varphi_{2i}) + p_2 f_2(\varphi_{1i}, \varphi_{2i}) + p_3 f_3(\varphi_{1i}, \varphi_{2i}) + p_4 f_4(\varphi_{1i}, \varphi_{2i}) + \\
 + p_5 f_5(\varphi_{1i}, \varphi_{2i}) + p_6 f_6(\varphi_{1i}, \varphi_{2i}) + p_7 f_7(\varphi_{1i}, \varphi_{2i}) - F(\varphi_{1i}, \varphi_{2i}) = 0, & (5)
 \end{aligned}$$

Решая систему уравнений (5) находим коэффициенты  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$  и вычисляем искомые параметры механизма  $d_D, k_D, h_D, l_3, l_{4CD}$  из соотношения (4). Тогда  $d_D = p_2, k_D = p_1,$

$$h_D = p_3, l_{4CD} = p_4, \quad l_3 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - p_5}.$$

Далее, по аналогичной схеме решая систему уравнения (5) можно вычислить другие комбинации пяти параметров  $d_D, h_D, \xi_D, l_3, l_2$  и т.д.

2. Рассмотрим замкнутый многоугольник  $OABFKMRO$ . Величина взвешенной разности имеет вид:

$$\Delta q = l_8^2 - l_{8\phi}^2 \quad (6)$$

где  $l_{5\phi}$  обозначает расстояние между точками  $K$  и  $F$  звена 8 при заданных значениях независимых переменных углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . В дальнейшем будем считать известными двенадцать параметров схемы механизма, входящие в выражения координат точек  $K$  и  $F$ . Вычислению подлежат пять параметров  $d_R, k_R, h_R, l_8, l_{6KM}$ . Зависимость  $l_{5\phi}$  от искомым параметров определяется соотношениями точек  $K$  и  $F$  звена 8 по кинематической схеме механизма.

**Вычисление пяти параметров.** Искомые параметры  $d_R, k_R, h_R, l_8, l_{6KM}$  многоугольника  $OABFKMRO$  определяются выражением взвешенной разности (6) и уравнением (2). Тогда составляющие уравнения (2) имеют вид:

$$\begin{aligned} f_1(\varphi_1, \varphi_2) &= -2l_1 \cos \varphi_1 - 2l_6 \cos \varphi_2; \\ f_2(\varphi_1, \varphi_2) &= 2l_6 \sin \varphi_2; \\ f_3(\varphi_1, \varphi_2) &= -2l_1 \sin \varphi_1 - 2l_2 \cos \alpha \sin \varphi_2; \\ f_4(\varphi_1, \varphi_2) &= -2l_1 \cos \varphi_1 \cos \bar{\psi} - 2l_1 \sin \alpha \sin \bar{\psi} + 2l_6 \cos(\psi_6 - \varphi_2); \\ f_5(\varphi_1, \varphi_2) &= 1; f_6(\varphi_1, \varphi_2) = 2 \cos \bar{\psi}; f_7(\varphi_1, \varphi_2) = 2 \sin \bar{\psi}. \\ F(\varphi_1, \varphi_2) &= -l_1^2 - l_2^2 - l_3^2 - l_6^2 + 2l_1 l_2 \cos \alpha \cos(\varphi_1 - \psi_2) + \\ &+ 2l_3 l_6 \sin \varphi_1 \cos \varphi_3 + 2l_3 l_6 \cos \alpha \cos \varphi_3 \cos \varphi_2 + 2l_2 l_6 \sin \alpha \sin \varphi_2. \\ P_1 &= x_R \quad P_2 = y_R; \quad P_3 = h_R; \quad P_4 = l_{6KM}; \\ P_5 &= x_R^2 + y_R^2 + h_R^2 + l_{6KM}^2 - l_8^2; \quad P_6 = P_1 P_4; \\ P_7 &= P_2 P_4. \end{aligned} \quad (7)$$

Используем для решения задачи синтеза параметров механизма известную схему решения линейных уравнений (5) для определения коэффициентов  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ . Вычисляем искомые параметры  $d_R, k_R, h_R, l_8, l_{6KM}$  механизма из соотношений (8). Аналогичным образом можно вычислить другие комбинации параметров данного замкнутого многоугольника.

3. Рассмотрим замкнутый многоугольник  $DENMRD$ . Величина взвешенной разности имеет вид:

$$\Delta q = l_5^2 - l_{5\phi}^2, \quad (9)$$

где  $l_{5\phi}$  обозначает расстояние между точками  $E$  и  $N$  звена 5 при заданных значениях независимых переменных углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . В дальнейшем будем считать известными двенадцать параметров схемы механизма, входящие в выражения координат точек  $E$  и  $N$ . Вычислению подлежат пять параметров  $d_R, k_R, h_R, l_5, l_7$ . Зависимость  $l_{5\phi}$  от искомых параметров определяется соотношениями точек  $E$  и  $N$  звена 5 по кинематической схеме механизма.

**Вычисление пяти параметров.** Искомые параметры  $d_R, k_R, h_R, l_5, l_7$  многоугольника  $DENMRD$  определяются выражением взвешенной разности (9) и уравнением (2). Тогда составляющие уравнения (2) имеют вид:

$$\begin{aligned} f_1(\varphi_1, \varphi_2) &= 2l_6 \cos \psi_2 - 2l_4 \cos \psi_1 - 2x_D, \\ f_2(\varphi_1, \varphi_2) &= 2l_6 \sin \psi_2 - 2l_4 \sin \psi_1 - 2y_D, \\ f_3(\varphi_1, \varphi_2) &= -2l_1 \sin \psi_1 \sin \psi_2, \\ f_5(\varphi_1, \varphi_2) &= 1, \quad f_6(\varphi_1, \varphi_2) = 2 \cos \varphi_2, \quad f_7(\varphi_1, \varphi_2) = 2 \sin \varphi_2, \\ F(\varphi_1, \varphi_2) &= -x_D^2 - y_D^2 - (z_D - z_R)^2 - l_4^2 - l_6^2 + 2l_6 x_D \cos \psi_2 - 2l_4 x_D \cos \psi_1 + \\ &+ 2l_6 y_D \sin \psi_2 - 2l_4 y_D \sin \psi_1 + 2l_4 l_6 (\cos \psi_1 - \psi_2). \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} p_1 = x_R = K_R; \quad p_2 = y_R = d_R; \quad p_3 = h_R; \quad p_4 = l_7, \quad p_5 = x_R^2 + y_R^2 + l_7^2 - l_6^2; \\ p_6 = p_1 p_4; \quad p_7 = p_2 p_4. \end{aligned} \quad (11)$$

Используем для решения задачи синтеза параметров механизма схему решения линейных уравнений (5) для определения коэффициентов  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$ . Вычисляем искомые параметры  $d_R, k_R, h_R, l_5, l_7$  механизма из соотношений (11). Аналогичным образом можно вычислить другие комбинации параметров данного замкнутого многоугольника.

#### 4. Условие замкнутости сложного замкнутого векторного контура.

В данном механизме изменяющийся замкнутый многоугольник представляет собой пространственную группу Ассур V класса, которая крайними шарнирами звеньев 2, 4, 6 в точках  $A, D, M$

соединена с двумя входными звеньями 1,7. Расстояние между указанными точками  $A, D, M$  является переменной величиной и должно удовлетворять условию замкнутости сложного векторного контура механизма.

**Пример.** Требуется синтезировать двухкривошипный пространственный рычажный механизм V класса. Решение проведем при вычислении пяти параметров замкнутого многоугольника  $OABCD$  механизма при единичной длине кривошипов.

Рассмотрено решение задачи синтеза по пяти параметрам замкнутого многоугольника  $OABCD$ . Результаты вычисления замкнутого многоугольника  $OABCD$  представлены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты вычисления значений независимых функций переменных аргументов

№	$\varphi_1 \cdot \varphi_2$ радиан	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$F$
1	0.0	-2.400	-0.1983	0.0	-0.3056	1	-0.0254	-0.1983	-14.400
2	0.5235	-1.7069	-0.1547	-0.0875	0.0187	1	-0.0261	-0.0941	-0.0842
3	0.7853	-0.8562	-0.0842	-0.0918	0.0179	1	-0.0263	-0.0932	-0.0840
4	1.0471	-0.4705	-0.0284	-0.0924	-0.0164	1	-0.0271	-0.0875	-0.0795
5	1.57079	0.00	-0.0197	-0.0975	-0.0089	1	-0.0278	-0.0798	-0.0791

Подставив значения независимых переменных в систему уравнений (5) находим искомые параметры  $d_D, k_D, h_D, l_3, l_{4CD}$  механизма.

Аналогичным образом вычисляются значения независимых функций переменных аргументов для замкнутых многоугольников  $OABFKMRO, DENMRD$  и находят искомые параметры.

**Условие замкнутости пространственной группы Ассура V класса.**

Для заданных значений независимых переменных углов  $\varphi_1, \varphi_2$ , входных звеньев 1, 7 в ходе решения найдены координаты крайних шарниров в точках  $A, D, M$ , которые позволяют определить расстояния между указанными точками.



$$\begin{array}{lll} x_{AD} = 0.820\text{м}; & y_{AD} = 0.926\text{м}; & z_{AD} = 0.547\text{м}; \\ x_{DM} = 0.750\text{м}; & y_{DM} = 0.490\text{м}; & z_{DM} = 0.360\text{м}; \\ x_{MA} = 0.18166\text{м}; & y_{MA} = 0.118323\text{м}; & z_{MA} = 0.3178\text{м}. \end{array}$$

Результаты вычисления переменных величин расстояний  $AD$ ,  $DM$ ,  $MA$  полностью подтверждает условие замкнутости пространственной группы Ассур V класса. Структурная ошибка механизма составляет  $\Delta = 0.00001$  мм.

Список использованной литературы:

1. Зиновьев В.А. Пространственные механизмы с низшими парами. Гостехтеоретиздат. - М.: 1952. - 431 с.
2. Левитский Н.И. Приближенный синтез шарнирных механизмов с двумя степенями свободы //Тр. семинара по ТММ. - вып. 83. изд. АН СССР. 1961.
3. Артоболевский И.И., Левитский Н.И., Черкудинов С.А. Синтез плоских механизмов. - М.: Госиздат, 1959. - 1084 с.