КЛАССИЧЕСКАЯ МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Жанузак Мухитулы ЕСМУХАН
Заслуженный работник ВШ РК, академик МАИ,
доктор технических наук, профессор
Казахского национального технического университета имени К. И. Сатпаева

"...надо преподавать не только сумму знаний, но и умение ею управлять."
Н. Назарбаев.

Начертательная геометрия развивает пространственное представление, логическое мышление и творческие способности студентов, помогает найти рациональное решение любой технической, технологической и экономической задач и дает студентам навыки научных исследований. Для реализации указанных возможностей необходима соответствующая методика преподавания этой важной для всех инженерных специальностей учебной дисциплины. При этом наряду чтением лекций на высоком научно-теоретическом уровне и интенсивной СРС, важная роль принадлежит лабораторно - практическим занятиям, где студенты решают различные геометрические задачи под руководством преподавателей. Высокое качество знаний достигается, если регулярно и систематически применять классическую методику решения задач начертательной геометрии. Классическая методика решения геометрических задач, как известно, включает в себе четыре этапа: анализ, построение, доказательство и исследование [3].

На первом этапе тщательно изучается условие задачи, мысленно повторяются нужные теоретические положения, выявляются зависимости между данными элементами. Надо мысленно представить данные геометрические объекты в пространстве и определить взаимное их расположение. Полезно выполнить от руки необходимые изображения и записать условие задачи, применяя математическую символику. В результате такого анализа намечается путь решения задачи, сформулируется алгоритм необходимых геометрических построений.

Сформулированный на первом этапе алгоритм решения задачи реализуется на втором этапе, т.е. непосредственно выполняется решение данной задачи на обратимом чертеже (метод Монжа, аксонометрия, перспективы, проекции с числовыми отметками). При этом, широко используются элементарные геометрические построения, известные из курса геометрии средней школы. К элементарным геометрическим построения относятся: проведение прямой, параллельной данной прямой; деление отрезка прямой и дуги окружности на равные части; построение прямой, перпендикулярной к данной прямой; построение треугольника или окружности, заданных различными способами и другие. Здесь студенты впервые сталкиваются понятием точности построения (решения задач). Малейшие отклонения от параллельности или перпендикулярности приводят к неудовлетворительным результатам. Выполняя одно и те же построение различными способами, они могут контролировать и повысить точность построений. Таким образом на этом этапе студенты получают практические навыки выполнения качественных изображений, необходимых при выполнении курсовых и дипломных проектов.

На третьем этапе доказывается правильность решений, полученных во втором этапе. Очень важно убедится в том, что получено оптимальное решение задачи. Многие студенты на вопрос: докажите, правильно ли вы решили задачу? - не могут ответить. У некоторых возникает сомнение и начинает искать другое решение.

На четвертом этапе надо исследовать условие задачи: всегда ли данная задача имеет решение? Если задача имеет несколько решений, то надо найти все решения и сравнить их между собой. Надо подумать над обобщением рассмотренной задачи (нельзя ли составить более общую задачу), а также о важных ее следствиях. Тем самым студенты получают первоначальные навыки выполнения научных исследований.

К сожалению, не всегда соблюдаются указанные этапы решения задач, что приводит к снижению роли начертательной геометрии в подготовке компетентных специалистов. В большинстве учебников и задачников третий и четвертый этапы (доказательство и исследование) игнорируются и, не уделяя достаточного внимания на первый этап, приступают к решению задачи. Для иллюстрации рассмотрим решения одной задачи, приведенные сначала в задачнике [1, стр. 42], а затем в задачнике [2, стр. 18].

"*Пример 37.* Провести через точку С прямую, составляющую с горизонтальной плоскостью проекций угол *α*, *а с* вертикальной плоскостью проекций – угол *β* *[α+β*<90°] (рисунок 1).

Решение. Предварительно проводим в стороне прямую, наклоненную к плоскостям проекций под заданными углами. Для этого берем произвольную точку А на вертикальной плоскости проекций и проводим через ее вертикальную проекцию *(a′)* прямую *a′b₁*, составляющую с осью проекций угол α. На этой прямой, как на гипотенузе, строим прямоугольный треугольник с углом β при вершине *a′*, для чего делим отрезок *a′b₁* пополам и радиусом,

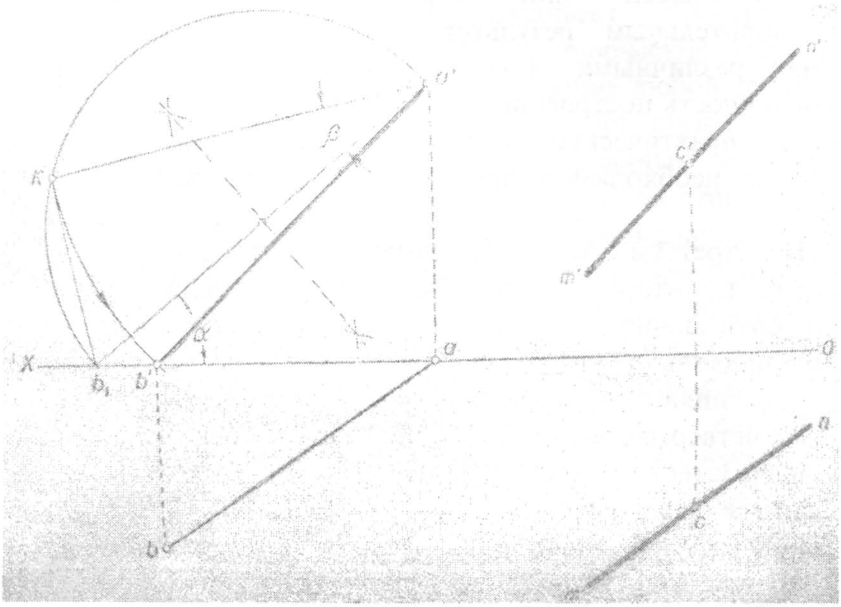

Рисунок 1

равным $\frac{a'b_1}{2}$, опишем полуокружность. Затем проводим через точку *a′* катет, составляющий с прямой $a'b_1$ угол *β*, до пересечения с дугой в точке *K* и соединяем точки *K* и b_1. Катет *Ka′* равен по величине вертикальной проекции вспомогательной прямой.

Катет Kb_1 определяет разность расстояний от концов горизонтальной проекций прямой до оси проекций. Для того чтобы установить положение горизонтальной проекций прямой, из точки *b′* восставляем к оси проекций перпендикуляр и на нем откладываем отрезок *bb′*, равный Kb_1. Соединив точки *a* и *b*, получаем горизонтальную проекцию *(ab)* вспомогательной прямой. Теперь остается провести через проекции *(c, c′)* точки С проекции *(mn, m′n′)* искомой прямой параллельно проекциям ранее проведенной прямой *(ab, a′b′)*".

Здесь, как видно из приведенного выше текста, отсутствуют первый, третий, и четвертый этапы решения задачи.

"2.2. Провести в первой четверти через точку А (рис. 2, *а*) прямую, составляющую с пл. π_1 угол φ_1=30° и с пл. π_2 угол φ_2=45° [2, стр. 42].

Решение. Следует проверить условие: каждый из углов (φ_1 и φ_2) должен быть острым, а сумма этих углов должна быть или меньше 90° (для прямой общего положения), или равна 90° (для профильной прямой). В задании $\varphi_1+\varphi_2$=30°+45°=75°, т.е. меньше 90°. Следовательно, построение может быть выполнено.

…Если задаться каким-либо отрезком АВ прямой и принять его за гипотенузу прямоугольного треугольника, то, зная углы φ_1 и φ_2, можно построить два таких треугольника (рис. 2, *б*). В одном из них (с углом φ_1) катет *А-1* выражает горизонт. проекцию отрезка *АВ*, а катет *В-1* – разность расстояний концов отрезка *АВ* от плоскости π_1; в другом треугольнике (с углом φ_2) катет *А-2* выражает фронт. проекцию отрезка *АВ*, а катет *В-2* – разность расстояний концов отрезка от пл. π_2.

Теперь можно построить чертеж (рисунок 2, *в*).

Откладываем на линии связи *А′′А′* от точки *А′′* вниз отрезок *А′′-3*, равный найденному на рисунок 2, *б* катету *В-1*. Через точку 3 проводим прямую, перпендикулярную к линии связи *А′′А′*, а из точки *А′′* проводим дугу окружности, радиус которой должен равняться катету *А*-2 (рисунок 2, *б*). В пересечении прямой и дуги получим точку *В′′*.

Для построения точки *В′* откладываем на линии связи *А′′А′* от точки *А′* вниз отрезок *А′-4,* равный катету *В-2* (рисунок 2, *б*), проводим через точку 4 прямую перпендикулярно к линии связи $A''A'$ и находим точку B′.

При точном построении проекция $A'B'$ (рисунок 2, *в*) должна получиться равной катету *A*-1 (рисунок 2, *б*).

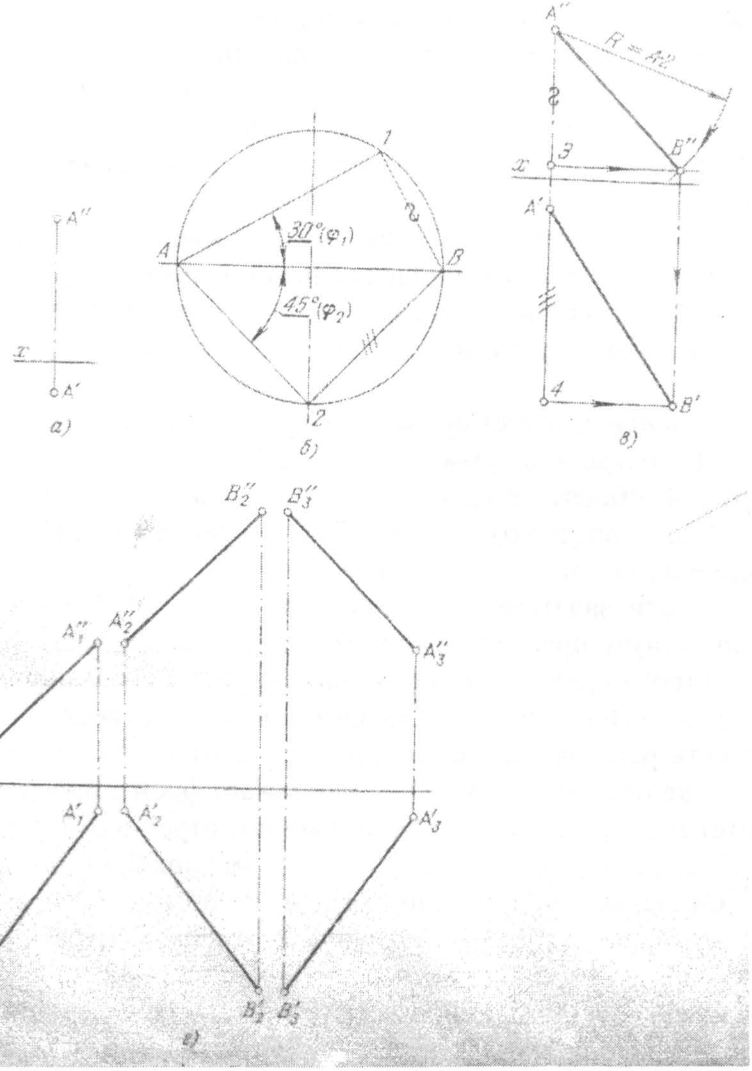

Рисунок 2

Конечно, можно получить при тех же данных еще три положения отрезка *AB*; соответствующие чертежи показаны на рисунке 2, *г*.

Построение, по существу, не отличилась бы от приведенного на рис. 2, *в*".

Здесь опять отсутствует анализ данных задачи. "Требования" о том, что углы φ_1 и φ_2 должны быть острыми, являются излишними. Это вытекает из определения угла между прямой и плоскостью. Как известно, под углом наклона прямой к плоскости понимается угол между данной прямой и её прямоугольной проекцией на эту плоскость. Поэтому $0^o \leq \varphi_1 \leq 90^o$ и $0^o \leq \varphi_2 \leq 90^o$. Угол $\varphi_1=90°$ (или угол $\varphi_2=90^o$) тогда, только тогда, когда эта прямая перпендикулярна к плоскости проекций. Поэтому такая прямая располагается параллельно другой плоскости проекций, т.е. $\varphi_2=0°$ (или $\varphi_1=0°$). Не понятно, почему должна быть $\varphi_1+\varphi_2<90°$? Не доказана правильность полученного результата и не выполнено исследование.

Теперь для решения этой задачи применим классическую методику [4].

1. Анализ. Пусть через заданную точку $S(S_1,S_2)$ требуется проводить прямую, составляющую с горизонтальной плоскостью проекций $\alpha=45°$, а с фронтальной плоскостью проекций – угол $\beta=30°$ (рисунок 4). Через точку можно провести множество прямых, наклоненных к горизонтальной плоскости проекций под углом α. Множество таких прямых образуют коническую поверхность вращения. Данная точка S является вершиной, *а* ось вращения – горизонтально проецирующей прямой (рисунок 3*а*). Множество прямых, проходящих через точку S и образующих с фронтальной плоскостью проекций угол β, образует также коническую поверхность вращения с фронтально проецирующей осью (рисунок 3, *б*). Отсюда следует, что искомая прямая является общей образующей (линией пересечения) указанных конических поверхностей вращения.

2. Построение. Построим фронтальную и горизонтальную проекции конуса с вершиной в точке S, а основание которого принадлежит горизонтальной плоскости проекций (рис. 4). Образующие этого конуса наклонены к горизонтальной плоскости проекций под углом α=45°. Затем можно построить второй конус с фронтально проецирующей осью и образующими, наклоненными к фронтальной плоскости проекций под углом $\beta=30°$. Длина образующей второго конуса равна длине образующей первого конуса ($|S_2 2_2| = |S_1 1_1|$).

3. Определяется общие образующие построенных конусов, которые

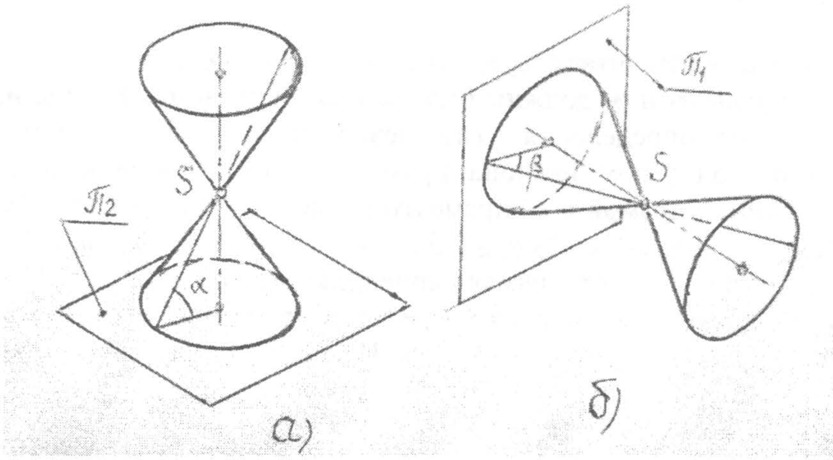

Рисунок 3

являются искомыми прямыми AS и BS. Коническая поверхность состоит из двух полостей. Поэтому условиям задачи отвечают еще две прямые CS и DS, которые симметрично расположены относительно фронтальной плоскости, проходящей через точку S. Фронтальная проекция прямой CS совпадает с фронтальной проекций прямой AS, а фронтальная проекция прямой DS – прямой BS.

3. Доказательство. Мы должны доказать, что найденные прямые AS, BS, CS и DS проходят через точку S и образуют с плоскостями проекций π_2 и π_1, соответственно углы α=45° и β=30°. Действительно, прямые AS, BS, CS и DS проходят через точку S, так как их фронтальные проекции проходят через фронтальную проекцию, а горизонтальные проекции – через горизонтальную проекцию точки S. Они образуют с горизонтальной плоскостью проекций углы α=45°, так как принадлежат поверхности конуса, образующие которого наклонены к плоскости π_2 под углом α. Аналогично доказываются, что прямые AS, BS, CS и DS наклонены к фронтальной плоскости проекций под углом β=30°, т.к. они принадлежат поверхности конуса, образующие которого наклонены к плоскости π_1, под углом β.

4. Исследование. Получается, что при $\alpha+\beta<90^o$ задача имеет четыре решения. Решениями являются общие образующие двух конусов вращения с общей вершиной, ось одного из них является горизонтально

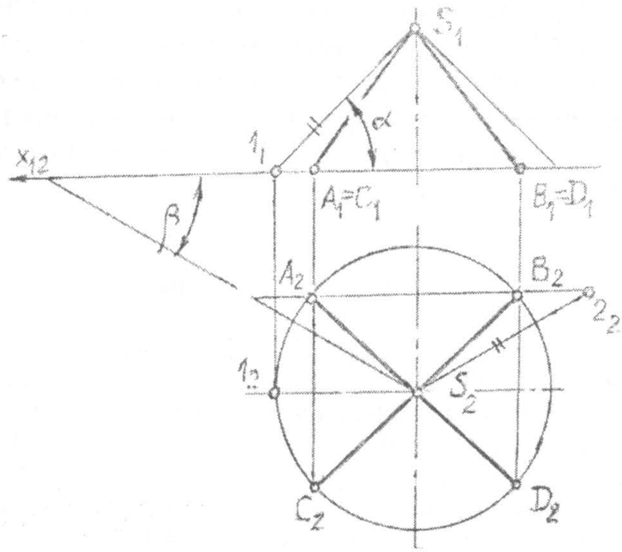

Рисунок 4

проецирующей прямой, а ось другого конуса - фронтально проецирующей прямой. Для этого поверхности указанных конусов должны пересекаться, а это имеет место только тогда, когда $0^o < \alpha+\beta<90^o$. Если $\alpha+\beta=90^o$, то конусы будут касаться друг друга по двум образующим, которые располагаются параллельно профильной плоскости проекций. При этом задача имеет только два решения. Пусть $\alpha+\beta=0^o$, это означает, что $\alpha=0^o$ и $\beta=0^o$. Угол между прямой и плоскостью будет равен 0°, если прямая параллельна плоскости. Тогда искомая прямая должна располагаться параллельно и фронтальной, и горизонтальной плоскостям проекций. Поэтому задача при $\alpha+\beta=0^o$ будет иметь единственное решение. Искомая прямая проходит через данную точку S и располагается перпендикулярно к продельной плоскости проекций. Если $\alpha+\beta>90^o$, то конусы имеют только единственную общую точку (вершину). Задача не имеет действительного решения. Чтобы решением рассматриваемой задачи была действительная прямая необходимо выполнить условие: $0^o\leq\alpha+\beta\leq90^o$.

Рассмотренную классическую методику решения задач начертательной геометрии можно применить для любой задачи и необязательно геометрической. Она допускает далеко идущее обобщение. Например: методика, рекомендуемая международным стандартом "ИСО 9001:2000 – система менеджмента качества" и известная как цикл: "Проектирование – выполнение – проверка - действие" (PDCA), является модификацией этой методики: анализ (планирование), построение (выполнение), доказательство (проверка) и исследование (действие по улучшению).

Список использованной литературы:

1. Арустамов Х. А. Сборник задач по начертательной геометрии с решениями типовых задач. Издание шестое. - М.: издание "Машиностроение", 1964. – 376 с.
2. Гордон В. О., Иванов Ю. Б. Солнцева Т. Е. Сборник задач по курсу начертательной геометрии. Издание шестое, переработанное. – М.: издание "Наука", 1989. – 376 с.
3. Есмуханов Ж. М., Салимжанов К. С. Методическое руководство к решению задач по начертательной геометрии. – Алма-Ата: КазПТИ, 1982. – 36 с.
4. Четверухин Н. Ф., Левицкий В. С., Пряншинокова З. И., Тевлин А. М, Федотов Г. И. Курс начертательной геометрии. Под редакцией проф. Н. Ф. Четверухина. – М.: Госиздательство технико-теоретической литературы, 1956. – 436 с.