5. Якунин В.И., Иванов Г.С. Судьбу начертательной геометрии должны определять специалисты. //Современные проблемы информатизации геомет¬рической и графической подготовки инженеров. - Саратов, 2007, - с. 3 - 7.

ТЕОРЕМЫ О ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Жанузак Мухитулы ЕСМУХАН
Заслуженный работник высшей школы Республики Казахстан,
доктор технических наук, профессор
Казахский национальный технический университет им. К.И. Сатпаева

Кайырбек Амиргазыулы КУСПЕКОВ
кандидат технических наук, доцент
Казахский национальный технический университет им. К.И. Сатпаева

Решение метрических задач начертательной геометрии требует построения взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей [1, 3]. Поэтому важные значения имеют приведенные ниже теоремы, устанавливающие признаки перпендикулярности прямых и плоскостей на эпюре Монжа и в линейной перспективе.

1. Эпюр Монжа

Лемма 1. Если из двух взаимно перпендикулярных прямых одна является горизонталью, то их горизонтальные проекции располагаются под прямым углом. Наоборот, если горизонтальные проекции двух взаимно перпендикулярных прямых расположены под прямым углом, то хотя бы одна из них является горизонталью.

Доказательство. Достаточность. Пусть $a \perp h$; $h || \pi_2$; $a \cap h = A$; $(AA_2) \perp \pi_2$ (рис.1).

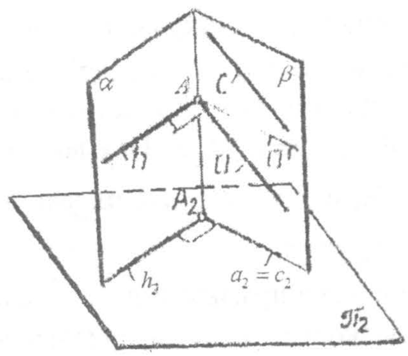
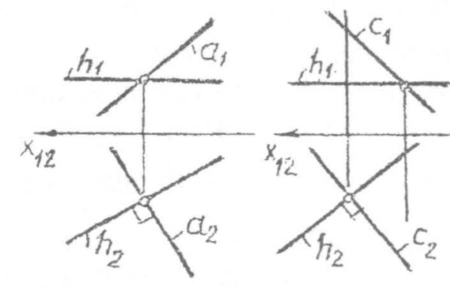


Рисунок - 1



а) б)

Рисунок - 2

Надо доказать, что $a_2 \perp h_2$. Обозначим плоскость, которая определяется пересекающимися в точке A прямыми h и (AA_2), через α, а плоскость, которая определяется пересекающимися прямыми a и (AA_2) - через β. $h_2 = \alpha \cap \pi_2$; $h_2 \| h$. Прямая h перпендикулярна плоскости β, так как она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым этой плоскости. $h \perp a$; $h \perp (AA_2) \Rightarrow h \perp \beta(a \cap (AA_2))$. Плоскость, перпендикулярная одной из двух параллельных прямых, будет перпендикулярна к другой. Поэтому $\beta \perp h_2$. Прямая, перпендикулярная к плоскости, будет перпендикулярна ко всем прямым этой плоскости. Поэтому $h_2 \perp a_2$, так как a_2 принадлежит плоскости β.

Необходимость. Пусть $a \perp h$ и $h_2 \perp a_2$ (рис. 1). Надо доказать, что $h \| \pi_2$. Рассмотрим проецирующие плоскости α и β. Допустим, что прямую a не параллельна плоскости π_2. Тогда на плоскости β через ее точку A можно проводить прямую a', расположенную параллельно прямой a_2. Прямая $a_2 \perp \alpha$, так как она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым h_2 и (AA_2) этой плоскости. Поэтому прямая a', параллельная прямой a_2, перпендикулярна любой прямой плоскости α. $a' \perp \alpha \Rightarrow h \subset \alpha$ и $a' \perp h$. По условию леммы $h \perp a$. Тогда получается, что прямая h

перпендикулярна плоскости β, так как она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым этой плоскости: $h \perp a$ и $h \perp a'$. Как известно, две прямые, перпендикулярные к одной и той же плоскости, будут параллельными. $h \perp \beta$ и $h_2 \perp \beta \Rightarrow h \| h_2$. Прямая h, параллельная прямой h_2 плоскости π_2, будет параллельна плоскости π_2, т.е. $h \| \pi_2$.

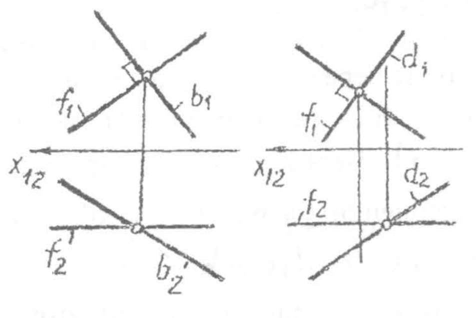
Лемму доказали для двух пересекающихся прямых. Однако, если провести прямую c, принадлежащую плоскости β и параллельную прямой a, то увидим, что лемма верна и для двух скрещивающихся под прямым углом прямых. На рис. *2а* изображены прямые a и h, которые пересекаются под прямым углом, а на рис. *2б* – прямые c и h, которые скрещиваются под прямым углом.

Лемма 2. Если из двух взаимно перпендикулярных прямых одна является фронталью, то их фронтальные проекции располагаются под прямым углом. Наоборот, если фронтальные проекции двух взаимно перпендикулярных прямых расположены под прямым углом, то хотя бы одна их них является фронталью.

Для доказательства леммы *2* достаточно повторить вышеприведенные рассуждения для леммы *1*, заменив слово «горизонталь» словом «фронталь» (принцип двойственности).

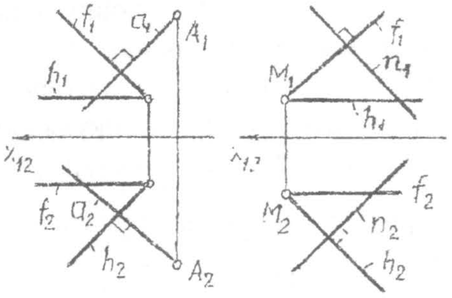
На рис. *3а* изображены прямые b и f, которые пересекаются под прямым углом, а рис. *3б* – прямые d и f, которые скрещиваются под прямым углом.

Теорема 1. Для того, чтобы прямая была перпендикулярна к плоскости, необходимо и достаточно, чтобы на эпюре горизонтальная проекция прямой была перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали, а фронтальная проекция – к фронтальной проекции фронтали плоскости.



а) б)

Рисунок - 3



а) б)

Рисунок - 4

Доказательство. Необходимость. Пусть заданы прямая $a(a_1, a_2)$ и плоскость $\alpha(h \cap f)$, которая перпендикулярна прямой a: $a \perp \alpha$. Надо доказать, что $a_2 \perp h_2$ и $a_1 \perp f_1$.

Из условия $a \perp \alpha$ вытекает, что $a \perp h(\subset \alpha)$ и $a \perp f(\subset \alpha)$. На основании первой части леммы *1* имеем, что $a \perp h \Rightarrow a_2 \perp h_2$. На основании первой части леммы *2* имеем, что $a \perp f \Rightarrow a_1 \perp h_1$.

Достаточность. Пусть для заданных на эпюре прямой $a(a_1, a_2)$ и плоскости $\alpha(h \cap f)$ выполняются условия: $a_2 \perp h_2$ и $a_1 \perp f_1$. Надо доказать, что $a \perp \alpha(h \cap f)$. На основании второй части леммы *1* имеем, что $a_2 \perp h_2 \Rightarrow a \perp h$. На основании второй части леммы *2* имеем, что $a_1 \perp f_1 \Rightarrow a \perp f$. Таким образом получается, что прямая a перпендикулярна к двум пересекающимся прямым плоскости α. Поэтому она перпендикулярна к этой плоскости: $a \perp h \subset \alpha$ и $a \perp f \subset \alpha \Rightarrow a \perp \alpha$.

На основании доказанной теоремы на рис. *4, а* опущен перпендикуляр a из точки $A(A_1, A_2)$ к плоскости $\alpha(h \cap f)$, а на рис. *4, б* через точку $M(M_1, M_2)$ проведена плоскость $\beta(h \cap f)$, перпендикулярная к заданной прямой $n(n_1, n_2)$.

Пример 1. Определить точку *L*, принадлежащую прямой $l(l_1, l_2)$ и отстоящую от точек A и B в одинаковом расстоянии (рис. 5).

Решение. Из условия примера следует, что точка L находится в одинаковом расстоянии от точек A и B. Множество таких точек образует плоскость α, которая проходит через середину отрезка AB и располагается перпендикулярно к нему. Находим середину (точку C) отрезка AB: $|AC| = |CB|$ и $C \in (AB)$. Через точку C проводим горизонталь h и фронталь f, перпендикулярные прямой AB. $C_1 \in h_1 || x_{12}$; $C_2 \in h_2 \perp (A_2B_2)$; $C_1 \in f_1 \perp (A_1B_1)$; $C_2 \in f_2 || x_{12}$. Пересекающие в точке C прямые h и f определяют некоторую плоскость $\alpha(h \cap f)$, любая точка которой одинаково удалена от точек A и B.

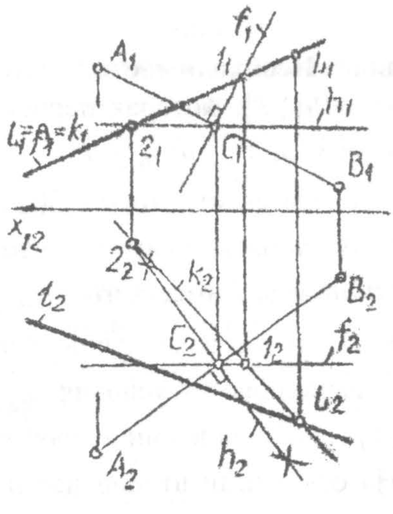


Рисунок – 5

Искомая точка L принадлежит прямой l и плоскости α, т.е. является их пересечением. Для построения точки пересечения L прямой l и плоскости α проведена через прямую l фронтально проецирующая плоскость β и определена линия пересечения k плоскостей α и β. Тогда точка пересечения прямых k и l будет искомой точкой L. Действительно точка $L(L_1, L_2)$ одинаково удалена от точек A и B и принадлежит прямой l. Задача всегда имеет единственное решение. Если прямые l и k окажутся параллельными, то решением этого примера будет несобственная точка прямой l.

2. Линейная перспектива

Теорема 2. Прямая тогда и только тогда перпендикулярна к плоскости, когда ее точка схода является антиполюсом линии схода этой плоскости относительно дистанционной окружности.

Доказательство. Известно, что:

- параллельные прямые пересекаются в несобственной точке, поэтому они имеют общую точку схода;
- параллельные плоскости пересекаются по несобственной прямой, поэтому они имеют общую линию схода;
- если прямая a перпендикулярна к плоскости α, то все прямые, параллельные прямой a, будут перпендикулярными плоскости α и всем плоскостям, параллельным плоскости α.

На картине устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками схода прямых и линиями схода перпендикулярных им плоскостей. Такое коррелятивное соответствие называется полярным [2, 4] и определяется заданием инвариантной коники. Если на плоскости задана коника k, то каждой точке P соответствует определенная прямая p этой плоскости. Прямая p называется полярой точки P. Обратно, любой прямой p плоскости соответствует определенная точка P этой плоскости, называемая полюсом прямой p.

Определение. Полярой называется геометрическое место четырех гармонических точек к полюсу и точкам пересечения с коникой k любой секущей, проходящей через полюс.

Известно, что точки A, B, C и D образуют гармоническую четверку, если их сложное отношение равно минус единице:

$$(ABCD) = -1.$$

Если коникой служит окружность, то легко построить полюс P поляры p (рис. 6). Пусть поляра пересекает конику k в точках M и N. Касательные t^M и t^N, проведенные через точки M и N, пересекаются в точке P. Прямая, соединяющая полюс P с центром O окружности k, и поляра p образуют прямой угол: $(OP) \perp p$.

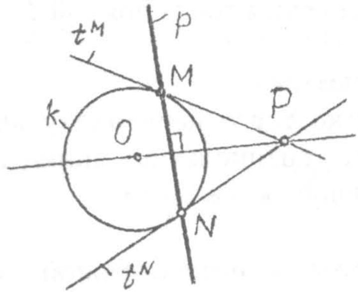


Рисунок - 6

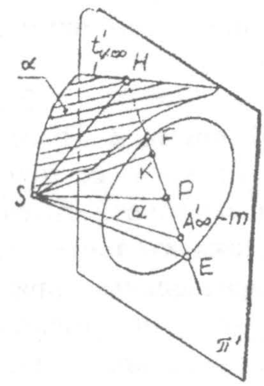


Рисунок - 7

Пусть S - точка зрения и π'- картинная плоскость (рис. 7). Основание перпендикуляра, опущенного из точки S на плоскость π', будет главной точкой P картины. Плоскость α, которая проходит через центр проецирования S, пересекает картинную плоскость π' по прямой $t'_{\alpha\infty} : S \in \alpha \bigcap \pi' = t'_{\alpha\infty}$. Прямая $t'_{\alpha\infty}$ является линией схода плоскости α и всех параллельных ей плоскостей. Выделим из связки прямых инцидентных точке S прямую a, которая перпендикулярна плоскости α: $S \in a \perp \alpha$. Определим точку схода A'_∞ прямой a и всех прямых, параллельных прямой a: $a \bigcap \pi' = A'_\infty$. Через главную точку P картины проводим прямую перпендикулярно к линии схода, которая пересекает эту прямую $t'_{\alpha\infty}$ в точке H. Прямая, перпендикулярная к плоскости, располагается под прямым углом ко всем прямым этой плоскости: $a \perp \alpha$; $t'_{\alpha\infty} \subset \alpha$; $a \perp t'_{\alpha\infty}$. Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна к самой плоскости. Поэтому прямая $t'_{\alpha\infty}$ перпендикулярна к плоскости, определяемой точками S, P и A'_∞. Дистанционная окружность $m(P, |SP|)$ пересекает прямую $A'_\infty P$ в точках E и F. Дистанционная окружность представляет собой геометрическое место точек схода прямых, образующих с картинной плоскостью угол в 45°. Отложив на прямую HP отрезок PK равный отрезку PA'_∞, получим точку K. $|PK| = PA'_\infty$. Проводим пря соединяющие точки E, F, H и K с точкой зрения S. Из равенства $|SP| = |PE| = |PF|$ следует, что $\angle ESP = 45°$ и $\angle FSP = 45°$. Отсюда $\angle ESP + \angle FSP = 90°$. $a \perp \alpha \Rightarrow A'_\infty SH = 90°$. Поэтому $\angle ESA'_\infty = \angle FSK = \angle KSF$. Оказывается, что отрезок SF является биссектрисой внутреннего угла треугольника при вершине S треугольника HSK, а прямая SE - биссектрисой внешнего угла при вершине S этого же треугольника. Известно, что биссектриса угла треугольника делит противоположную этому углу сторону на отрезки, пропорциональные смежным сторонам. Поэтому рассматривая биссектрису внутреннего угла при вершине S треугольника HSK, получим

$$\frac{|HF|}{|FK|} = \frac{|HS|}{|KS|}.$$

Рассматривая биссектрису внешнего угла при вершине S треугольника HSK, получим

$$\frac{|HE|}{|KE|} = \frac{|HS|}{|KS|}.$$

Правые стороны двух последних равенств равны, поэтому будут равными левые их стороны:

$$\frac{|HF|}{|FK|} = \frac{|HE|}{|KE|}.$$

Если изменить направление отрезка FK на обратное KF, то знак отношения изменяется так же на обратное:

$$\frac{|HF|}{|FK|} = -\frac{|HF|}{|KF|}.$$

$$\frac{|HE|}{|KE|} = (HKE); \quad \frac{|HF|}{|FK|} = -(HKF)$$

$$(HKE) = -(HKF) \Rightarrow \frac{(HKE)}{(HKF)} = (HKEF) = -1 \cdot$$

Таким образом мы доказали, что точки H, K, E и F образуют гармоническую четверку. А это означает, согласно приведенному выше определению, что точка K является полюсом прямой $t'_{\alpha\infty}$ относительно дистанционной окружности m, а прямая $t'_{\alpha\infty}$ - полярной точки K. Другими словами, между точкой симметричной точке схода прямой, и линией схода перпендикулярной ей плоскости установлено полярное соответствие. Точку схода прямой называют антиполюсом линии схода перпендикулярной ей плоскости относительно дистанционной окружности. Теорема доказана.

Пример 2. Через прямую $a(a', a'_2)$ провести плоскость β перпендикулярно к плоскости α ($f_{\alpha k} \parallel t_{\alpha\infty}$).

Решение. Для решения задачи достаточно взять произвольную точку на прямой a и опустить перпендикуляр из этой точки на плоскость α. Тогда плоскость, определяемая этим перпендикуляром и заданной прямой a, будет искомой.

Известны: линия горизонта h, главная точка картины P, дистанционная окружность m, перспектива a' и перспектива основания a'_2 прямой a, картинный след $f'_{\alpha k}$ и линия схода $t'_{\alpha\infty}$ плоскости α (рис. 8). Определим полюс A'_{∞} линии схода $t'_{\alpha\infty}$ относительно дистанционной окружности m. Для этого проводим через точку P прямую, перпендикулярную линии схода $t'_{\alpha\infty}$. Линия схода и дистанционная окружность пересекается в точке C. Прямая t, проходящая через точку C и перпендикулярная радиусу PC дистанционной окружности m, пересекает предыдущую прямую искомой точке A'_{∞}: $t \cap (PA_{\infty}) \perp t'_{\alpha k} = A'_{\infty}$. Антиполюс K'_{∞} (полюс прямых, перпендикулярных к плоскости α) линии схода $t'_{\alpha\infty}$ определяется как точка, симметричная точке A'_{∞} относительно главной точке P картины: $K'_{\infty} \in (PA'_{\infty})$; $|K'_{\infty}P| = |PA'_{\infty}|$. Для определения перспективы основания $K'_{\infty 2}$ точки K_{∞} надо опустить перпендикуляр из точки K'_{∞} на линию горизонта. Возьмем произвольную точку $B(B', B'_2)$ на прямой $a(a', a'_2)$ и проводим прямую $b(b', b'_2)$ через две точки B и K_{∞}. Точка схода K'_{∞} прямой b является антиполюсом линии схода $t'_{\alpha\infty}$ плоскости α. Поэтому $b \perp \alpha$.

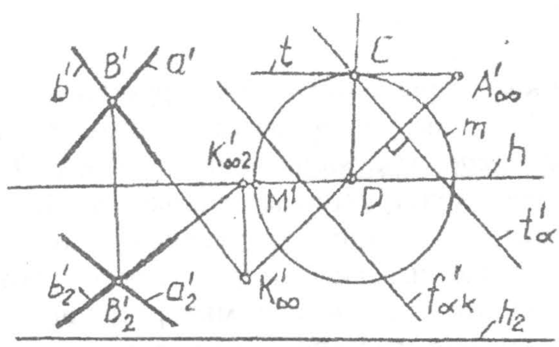


Рисунок – 8

Прямые a и b, которые пересекаются в точке B, определяют некоторую плоскость $\beta(a \cap b)$. Плоскость β проходит через прямую a и перпендикулярна к плоскости α, так как содержит прямую b, перпендикулярную плоскости α. $\beta(a \cap b)$ - искомая плоскость.

Список использованной литературы:

1. Четверухин Н. Ф., Левицкий В. С. и другие. Начертательная геометрия. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1963. – 420 с.

2. Глаголев Н. А. Проективная геометрия. 2-е изд., испр. и доп. – М.: Высшая школа, 1963. – 344 с.

3. Есмұхан Ж.М., Есмұханова Ж.Ж. Сызба геометрия. Жоғары оқу орындарының студенттеріне арналған оқулық. – Алматы: ҚазҰТУ, 1998. – 264 б.

4. Исқақов М. Проективтік геометрия. Екінші бөлім. – Алма-Ата: Мектеп, 1966. – 236 б.