АКСИОМАТИКА ПРОЕКТИВНОЙ ЛИНЕЙЧАТОЙ ГЕОМЕТРИИ

Владимир Яковлевич ВОЛКОВ
доктор технических наук, профессор
Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия

Константин Леонидович ПАНЧУК
доктор технических наук, профессор
Омского государственного технического университета

Линейчатое пространство $R_3(\ell)$ принято рассматривать как многообразие прямых расширенного евклидова пространства R_3 [1, 3]. Известна модель Плюккера, позволяющая моделировать линейчатое пространство квадрикой Q_4^2 в проективном пространстве P_5 [3]. В настоящей работе показана возможность построения проективной геометрии пространства $R_3(\ell)$ в пространстве R_3.

1. Конструктивно-метрическое соответствие эллиптической плоскости и линейчатого пространства.

Известно, что связка T_2 прямых и плоскостей, сфера S_2 с центром в центре связки и отождествленными диаметрально противоположными точками, плоскость R_2^S касательная к этой сфере - это гомеоморфно соответственные модели эллиптической плоскости в пространстве R_3 [2, 3]. Эллиптическая плоскость может быть рассмотрена как метризованная проективная плоскость [4]. Это означает, что расстояние $\delta < \frac{\pi}{2} r$ между двумя точками $Y\ (y_k)$ и $Z\ (z_k)$, где r - кривизна эллиптической плоскости, - это расстояние может быть выражено как в координатной форме:

$$\cos(\delta / r) = |\Sigma y_k z_k| / r^2,\ k=1, 2, 3, \qquad (1)$$

так и в проективной форме:

$$\delta / r = (1/2i) \ln (Y, Z, I_1 I_2), \qquad (2)$$

где I_1, I_2 - точки пересечения прямой (Y, Z) с абсолютом k^2_R: $\Sigma x^2_k = 0$, $k=1, 2, 3$, принадлежащим плоскости R^S_2.

Из полярности точки эллиптической плоскости R^S_2 относительно ее абсолюта k^2_R следует уравнение прямой в этой плоскости:

$$\Sigma\, \alpha_k x_k = 0,\ k=1, 2, 3, \qquad (3)$$

где α_k - однородные декартовы координаты полюса $A(\alpha_k)$ этой прямой, они же - ее однородные линейные координаты. В этой полярности расстоянию $\delta < \frac{\pi}{2} r$ между двумя точками $A(\alpha_k)$ и $B(b_k)$ взаимно однозначно соответствует угол между двумя прямыми $\Sigma\alpha_k x_k = 0$ и $\Sigma b_k x_k = 0$, $k=1, 2, 3$:

$$\cos\varphi = |\Sigma\alpha_k b_k| / r^2, \qquad (4)$$

который также имеет соответствующее проективное представление:

$$\varphi = (1/2i) \ln (a, b, i_1, i_2) = (1/2i) \ln(A, B, I_1, I_2) = \delta / r; \qquad (5)$$

где i_1, i_2 - изотропные прямые, проходящие через точку $a \cap b$.

Изотропный конус K^2 связки T_2 индуцирует на моделях S_2 и R^S_2 эллиптическую метрику, определяемую абсолютами $k^2_S \in S_2$ и $k^2_R \in R^S_2$. Конструктивно указанные абсолюты представляют собой мнимые коники - линии пересечения конуса K^2 и с моделями S_2 и R^S_2 соответственно. Линия пересечения конуса K^2 и несобственной плоскости Δ_∞ расширенного пространства R_3 представляет собой абсолют k этого пространства. Поскольку для изотропных прямых имеет место параллельность [2], то через несобственную точку абсолюта k^2_∞ проходит связка изотропных прямых, а все множество изотропных прямых расширенного пространства R_3, проходящих через точки абсолюта k_{∞}^{2}, образует специальный квадратичный комплекс K_M^2, конусом которого является изотропный конус K^2. Так как абсолют k_{∞}^{2} представляет собой образ абсолютов k_S^2, k_R^2 и комплекса K_M^2 на несобственной плоскости Δ_{∞}, то комплекс K_M^2 логично будет принять в качестве абсолюта пространства $R_3(\ell)$. Соответствие абсолютов k_S^2, k_R^2 и K_M^2, и по их общему несобственному мнимому образу k_{∞}^{2} приводит к соответствию метрических структур моделей R_2^S, S_2 эллиптической плоскости и линейчатого пространства $R_3(\ell)$:

$$\mathrm{M}\,(R_2^S) \leftrightarrow \mathrm{M}\,(S_2)\,\mathrm{M}\,(R_3\,(l)) \tag{6}$$

Известно конструктивно-метрическое соответствие пространств [4]:

$$R_2^S \leftrightarrow S_2 \leftrightarrow T_2 \rightarrow S_{2(\omega)} \leftrightarrow R_3(l)\; R_{2\,(\omega)}^S, \tag{7}$$

где $_{2(\omega)}^{S}$ и $\mathrm{R}_{2(\omega)}^S$ представляют собой соответственно единичную дуальную сферу и плоскость, касательную к этой сфере, принадлежащие дуальному евклидову пространству $R_{3\,(\omega)}$. В этом соответствии прямой линии пространства $R_3(\ell)$ отвечают точка эллиптической плоскости R_2^S и точка дуальной эллиптической плоскости $R_{2(\omega)}^S$ единичного радиуса кривизны, при этом соответствие $R_3(\ell) \leftrightarrow R_{2(\omega)}^S$ является гомеоморфным. Основной элемент $S_2 \rightarrow S_{2(\omega)} \leftrightarrow R_3(\ell)$ соответствия (7) по существу представляет собой известный принцип перенесения Котельникова-Штуди [3]. Добавление к нему соответствия плоскостей R_2^S и $R_{2\,(\omega)}^S$ расширяет возможности этого принципа и позволяет выполнять конструктивно - метрическое моделирование пространства $R_3(\ell)$ этими плоскостями. Из последовательности соответствий (7) следует соответствие двух плоскостей $R_2^S \rightarrow R_2^S(\omega)$, которое до конца не изучено, но известно, что двухпараметрическое множество образов плоскости R_2^S, получаемое соответствием (7), принадлежит подмножеству чисто вещественных точек дуальной эллиптической плоскости $R_2^S(\omega)$.

Укажем основные признаки соответствия (6) метрических структур.

1.1 Соответствие расстояний

Расстоянию $\delta < \frac{\pi}{2} r$ двух точек $Y(y_k)$ и $Z(z_k)$ плоскости R_2^S, определяемому формулами (1) и (2), соответствует дуальный угол $\Delta = \delta_0 + \omega\delta_1$, $\omega^2=0$ двух направленных прямых $y(Y_k)$ и $z(Z_k)$ в пространстве $R_3(\ell)$, определяемый формулами $\cos\Delta = \Sigma\, Y_k\ Z_k$, где $\cos\Delta = \cos\delta_0 - \omega\delta_1 \sin\delta_0$ и $\Delta = (1/2i)\ell n\lambda = (1/2\, i) ln\,(y, z, i_1, i_2)$, где $\ell n\lambda = \ell n\lambda_0 + \omega(\lambda_1/\lambda_0)$; $\omega^2 = 0;\ k=1,\ 2,\ 3$. В приведенных формулах ω - множитель Клиффорда, δ_0 и δ_1 соответственно кратчайшее расстояние и угол между прямыми y и z; Y_k и Z_k - дуальные декартовы координаты направленных прямых y и z соответственно ($y_к = y_{ок} + \omega y_{1к}$, $z_к = z_{ок} + \omega z_{1к}$). Как из полярности точки в плоскости R_2^S относительно абсолюта k_R^2 следует уравнение прямой, так из полярности прямой a $(A_к)$ пространства $R_3(\ell)$ относительно абсолюта K_M^2 следует уравнение щетки $\Sigma A_к X_к = 0;\ к=1,\ 2,\ 3$, представляющей собой конгруэнцию прямых, одна из двух директрис которой является несобственной. Отсюда следует, что на основании соответствий (6) и (7) вещественным образом прямой линии плоскости R_2^S является щетка в пространстве $R_3(\ell)$ дуальным образом которой в плоскости $R_2^S(\omega)$ является дуальная прямая.

1.2 Соответствие углова

Углу между двумя прямыми в плоскости R_2^S определяемому формулами (4) и (5), соответствует в пространстве $R_3(\ell)$ угол между двумя щетками $\Sigma A_k\ X_k=0$ и $\Sigma B_k\ X_k=0,\ k=1,\ 2,\ 3,$ определяемый формулами [5] $\cos\Phi = \Sigma\, A_k B_k$, $\Phi = \varphi_0 + \omega\varphi_1$, $\omega^2=0$ и $\Phi = (1/2i)\ ln\,(a,\ b,\ i_1\ i_2)$, где $a(A_k), b(B_k);\ i_1\ i_2$- соответственно пара вещественных и пара изотропных прямых - осей соответствующих щеток первого порядка, принадлежащих одной щетке второго порядка с осью - прямой кратчайшего расстояния между осями указанных щеток.

Из вышеизложенного следует, что плоскость $R_2^S(\omega)$, как и вышерассмотренная плоскость R_2^S, допускает интерпретацию метризованной проективной плоскости с абсолютом $k^2_{(\omega)}$, представляющем собой в соответствии с (7), дуальный образ абсолюта K^2_M линейчатого пространства $R_3(\ell)$.

2. Соответствие аксиоматик эллиптической плоскости и линейчатого пространства.

Опираясь на систему аксиом $A(R_2^S)$ эллиптической плоскости R_2^S, можно построить проективную геометрию линейчатого пространства с системой аксиом $A(R_3(\ell))$, соответствующей системе аксиом $A(R_2^S)$. Это следует из того, что, во-первых, эллиптическая плоскость R_2^S и соответствующая ей модель $R_2^S(\omega)$, линейчатого пространства $R_3(\ell)$ могут быть интерпретированы как метризованные проективные плоскости, вещественная и дуальная; во-вторых, абсолюты этих плоскостей представляют собой мнимые квадратичные образы, соответствующие конструктивно друг другу по принципу перенесения (7). Гомеоморфное соответствие $R_3(\ell)\leftrightarrow R_2^S(\omega)$, как элемент этого принципа, позволяет выполнить интерпретацию проективной геометрии пространства $R_3(\ell)$ на плоскости $R_2^S(\omega)$ [5].

Рассмотрим соответствие систем аксиом $A(R_2^S)$ и $A(R_3(\ell))$. Аксиомам связи эллиптической плоскости R_2^S [6] соответствуют аксиомы связи линейчатого пространства $R_3(\ell)$:

1. Каковы бы ни были две прямые, существует щетка, проходящая через них.

2. Каковы бы ни были две различные прямые, существует не более одной щетки, проходящеи через них.

3. В каждой щетке имеется не менее двух прямых (даже бесконечно много прямых). Существуют три прямые, не принадлежащие одной щетке.

4. Каждые две щетки имеют общую прямую.

Сделаем пояснение относительно указанного в п. *2* понятия "различные прямые". Двум различным точкам плоскости R_2^S соответствуют две различные прямые связки T_2, которым по принципу перенесения (7) соответствуют две различные, т.е. скрещивающиеся, прямые пространства $R_3(\ell)$.

На основании аксиом связи *1-4*, операций проецирования и сечения, имеющих место в пространстве $R_3(\ell)$, доказаны аналоги известных теорем проективной геометрии плоскости P_2 для пространства $R_3(\ell)$ [7]: прямая и обратная теоремы Дезарга, теоремы о гармонических свойствах полного четырехугольника и четырехсторонника. Теорема Дезарга для пространства $R_3(\ell)$ формулируется следующим образом: если три щетки, содержащие соответственные вершины - линии двух линейчатых треугольников, проходят через одну прямую, то три прямые, принадлежащие соответственным сторонам - щеткам этих линейчатых треугольников, принадлежат одной и той же щетке.

На основе отношения разделенности двух пар прямых в щетке, принятого в качестве основного отношения порядка, в пространстве $R_3(\ell)$ определены следующие проективные аксиомы порядка, являющиеся "линейчатыми" аналогами соответствующих проективных теорем плоскости P_2 [7]:

1. Каковы бы ни были три различные прямые α, β, γ произвольной щётки, существует в этой щётке такая прямая δ, что пара α, β разделяет пару γ, δ. Если пара α, β разделяет пару γ, δ, то α, β, γ, δ различны.

2. Если пара α, β разделяет пару γ, δ, то пара β, α разделяет пару γ, δ и пара γ, δ разделяет α, β (взаимность свойства разделённости и его инвариантность относительно смены порядка рассмотрения прямых в паре).

3. Каковы бы ни были четыре различные прямые α, β, γ, δ в щётке, из них могут быть всегда и единственным образом составлены две разделённые пары.

4. Пусть даны в щётке различные прямые α, β, γ, δ, λ; если пары γ, δ и γ, λ, разделяют пару α, β, то пара δ, λ, не разделяет пару α, β.

5. Пусть даны в щётке различные прямые α, β, γ, δ; если пары γ, δ и γ, λ не разделяют пару α, β, то пара δ, λ также не разделяет пару α, β.

6. Пусть α, β и γ, δ - две пары различных прямых щётки φ^1; α', β' и γ', δ' - их проекции в щётке ψ^1, полученные при помощи произвольной прямой многообразия $R_3(\ell)$ - оси ε щетки второго порядка. Если пары α, β и γ, δ разделяют друг друга, то пары α', β' и γ', δ' также разделяют друг друга. То есть разделённость двух пар есть свойство, инвариантное относительно операций проецирования $\alpha \to (\alpha, \varepsilon)^1$; $\beta \to (\beta, \varepsilon)^1$; $\gamma \to (\gamma, \varepsilon)^1$; $\delta \to (\delta, \varepsilon)^1$ и сечения $(\alpha, \varepsilon)^1 \cap \psi^1 = \alpha'$; $(\gamma, \varepsilon)^1 \cap \psi^1 = \gamma'$; $(\beta, \varepsilon)^1 \cap \psi^1 = \beta'$; $(\delta, \varepsilon)^1 \cap \psi^1 = \delta'$.

Разделенность двух пар прямых щетки есть свойство, инвариантное относительно операций проецирования и сечения в пространстве $R_3(\ell)$. На его основе вводится понятие класса прямых щетки и, как следствие, понятия линейчатого отрезка - отсека щетки между двумя ее выделенными прямыми, включая последние, и линейчатого угла, образуемого полуотсеками двух щеток с общей прямой, принадлежащей граничным пучкам полуотсеков [7]. На основе линейчатых отрезка и угла строится линейчатый треугольник и доказывается соответствующая теорема Паша для пространства $R_3(\ell)$. Для множества собственных прямых пространства $R_3(\ell)$ вводится понятие "конгруэнтность" для линейчатых отрезков и углов. Два линейчатых отрезка будем считать конгруэнтными, если существует движение во множестве собственных прямых пространства $R_3(\ell)$, в результате которого происходит наложение этих отрезков, при этом выделенные граничные прямые линии одного линейчатого отрезка налагаются соответственно на выделенные граничные прямые другого.

В линейчатом пространстве $R_3(\ell)$ имеет место аксиома Дедекинда непрерывности множества прямых щетки, являющаяся "линейчатым" аналогом этой теоремы для плоскости R_2^S. При помощи операций проецирования и сечения в пространстве $R_3(\ell)$ аксиома непрерывности может быть перенесена на множество прямых другой щетки и на множество щеток, принадлежащих щетке второго порядка [7].

Все вышеизложенное позволяет утверждать, что если прямую линию и щетку принять в качестве основных объектов линейчатого пространства $R_3(\ell)$ с отношениями связи, порядка, непрерывности и конгруэнтности, то оно будет представлять собой метрическое проективное линейчатое пространство, а выше приведенная система аксиом составит основу проективной геометрии этого пространства [7].

Список использованной литературы:

1. Клейн Ф. Высшая геометрия. - М.; Л.: ОНТИ, 1939. - 400с.
2. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. - М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. - 355 с.
3. Розенфельд Б. А. Неевклидовы геометрии. - М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1955. -744 с.
4. Панчук К. Л., В. Я. Волков. Конструктивно-метрическое моделирование линейчатого пространства //Вестник КузГТУ. - 2007. - №6. - С. 55-58.
5. Панчук К. Л., В. Я. Волков. Моделирование линейчатого пространства дуальной эллиптической плоскостью //Вестник СибГАУ им акад. М.Ф. Решетнева. - Красноярск, 2007. - Вып. 4(17). - С. 54-56.
6. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. - М.: Наука, 1971. - 576 с.
7. Панчук К. Л. Геометрическое моделирование линейчатого метрического пространства в инженерной геометрии и ее приложения*: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.01.01. - Омск: ОмГТУ, 2009. - 40с. - Библиогр.: с. 39-40]

КОНЦЕПЦИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ

Геннадий Сергеевич ИВАНОВ
доктор технических наук, профессор
Московский государственный университет леса И.М. Дмитриева,

Необходимость параллельного изучения графических и аналитических алгоритмов решения задач и, как следствие, постановка интегрированного курса линейной алгебры и многомерной начертательной геометрии назрела давно [1]. Первые попытки в этом направлении предпринял проф. И.И. Котов еще в 60-е годы прошлого века в Московском авиационном институте. В настоящее время решение этой проблемы приближается к критической, что проявляется в содержании государственных образовательных стандартов как школьного, так и высшего образования.