МРНТИ 27.21.21

У.Т.Рихсибаев[1], К.Маликов[2]

[1]Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Ташкент, Узбекистан
[2]Ташкентский государственныйпедагогический университет имени Низами, Ташкент, Узбекистан
(E-mail: [1]rihsimbayev@mail.ru, [2]malikov@bk.ru)

Теорема Гаусса и Польке-Шварца, как основная теорема параллельной прямоугольной проекции аксонометрической системы

Аннотация: В этой статье представлены результаты научно-исследовательской работы по изучению взаимоотношений параллельного проецирования системы Декартовой трёхмерной и аксонометрической двумерной. А так же креативно анализировав теоремы Гаусса, Польке и Польке-Шварца, разработана единая теорема аксонометрии, теорема Гаусса и Польке-Шварца.

Ключевые слова: аксонометрия, абстрактный, наглядное изображение, произведение искусства, плоскости координат, Декартовая система координатных плоскостей, треугольник следов, коэффициенты искажения, аксонометрические оси.

В этой статье приводятся итоги научно-исследовательской работы, проведенной по изучению взаимосвязи между теоремой Гаусса и Польке-Шварца.

Начертательная геометрия непосредственно связана, как и другие предметы, с математикой. И каждая фигура (точка, отрезок, прямая, плоскость и тело) имеет математический модуль - выражение, то есть формулу.При помощи этих формул и математических выражений каждое изображение, эпюр – чертёж и проекция исследуются и теоретически обосновываются.

В любой картинной плоскости произведений изобразитель-ного искусства можно провести равносторонний треугольник *ABC*, стороны которого равны (•) ед.изм., или произвольный треугольник (рис.1).

Представим, что оси *OX, OY* и *OZ* (равной или различной длины) декартовой системы координат *OXYZ*, упираются к картинной (аксонометрической) плоскости по точкам *A, B* и *C*.

Если их соединить прямой, то образуется так называемой треугольник следов, как пересечения картинной-аксонометрической плоскости с упирающейся к ней натуральной системой координатных плоскостей.

Рисунок 1

Таким образом, проведенный треугольник ABC является линией пересечения аксонометрической – картинной плоскости с системой Декартовых координатных *(XOY, XOZ и YOZ)* плоскостей и образуют треугольник $\Delta A'B'C'$, совпадающей с ΔABC.

Если точку O проецировать в любом направлении проецирования, то в аксонометрической плоскости, т.е. в этом треугольнике или за его чертой изображаются проекции начала натуральных координат как O' и осей X, Y, Z как X', Y', Z' в аксонометрической плоскости (рис. 2). В этом случае, прямая OO' является направлением проецирования s.

Треугольник ABC, точка O' и оси X', Y', Z' являются составной частью элементов, которые определяют аксонометрическую систему.

Направление проецирования s может быть направлено перпендикулярно или под некоторым углом к аксонометрической плоскости. В зависимости от этого аксонометрические проекции бывают прямоугольными или косоугольными.

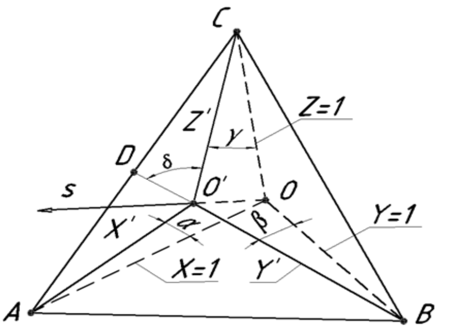

Рисунок 2

Немецкий учёный математик Гаусс (1839-1840 годах) разработал основную теорему–ортогональной аксонометрической проекции на основе ΔABC, как результат пересечения пространственных координатных плоскостей с аксонометрической - картинной плоскостью.Теорема Гаусса: Если через L, M, N обозначим комплексные число соответствующие радиусам-векторам l, m, n, то условие $L^2+M^2+N^2 = 0$ является необходимым и достаточным для того чтобы упомянутые три радиуса – вектора служили ортогональной аксонометрической системой [1].Нужно отметить то, что на изданных литературах и научных трудах после *1960* годов о теореме Гаусса, которое является основной теоремой ортогональной аксонометрической системы, ничего не сказано.

Воистину это так, наглядное изображение объекта в пространстве, который изображен на картинной-аксонометрической плоскости тремя радиусами-векторами, является прямоугольной проекцией координатных осей Декартовой системы. По теореме Гаусса, сумма квадратов комплексных чисел, состоят из ломаных линий – как треугольник *ABC* (рис. 2) и соответствующих комплексным числам радиус-векторов $\ell, m, n,$ являющимися биссектрисами углов *A, B, C*.

Натуральная координатная система *OXYZ* и аксонометрическая система *O'X'Y'Z'* непосредственно связаны направлением проецирования *s*.

Если направление *s* параллельна *OX* или *OY* или *OZ*, аксонометрическая плоскость соответствует координатным плоскостям проекций *XOY-H* или *XOZ-V* или *YOZ-W*. В таких случаях построенные изображения являются двумерными. То есть в этом случае *O'X'Y'Z'*, вместо наглядного изображения, проецируется на традиционные три проекции: вид спереди, вид сверху и вид слева.

Если плоскость координат XOZ взять как V фронтальную плоскость, то аксонометрическая система $O'X'Y'Z'$, изображается под прямым углом $X'O'Z'$. Так как ось $O'Y'$ проецируется на плоскость V в виде точки. Полученное изображение называется фронтальной проекцией натуральной системы координатных плоскостей $OXYZ$. А также, аналогично в горизонтальной (H) и в профильной (W) плоскостях проекции можно получить горизонтальную и профильную проекцию Декартовой системы.

Таким образом, применяемые в начертательной геометрии горизонтальные, фронтальные и профильные проекции являются частным положением аксонометрической проекции.

В аксонометрической системе оси $O'X'$, $O'Y'$ и $O'Z'$ проецируются в уменьшенной величине от единицы длины натуральных осей Декартовой системы, которые называются коэффициентами искажения, (u, v, w).

Из рисунка *2*:

$$u = \frac{AO'}{AO} = \cos\alpha;\ v = \frac{BO'}{BO} = \cos\beta; w = \frac{CO'}{CO} = \cos\gamma, \quad (1)$$

Имеющие общие противоположные катеты в прямоугольном $AO'O$, $BO'O$, $CO'O$ треугольнике натуральные координатные оси с направлением проецирования $(s \equiv O'O)$образуют углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1,$ которые дополняют углы α, β, γ на $90°$. Эти углы $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ направления проецирования (s) являются направляющими углами, (они не указаны на чертеже).

Из аналитической геометрии известно, что косинусы углов, имеющие общее направление, равны *1*:

$$cos^2\alpha_1 + cos^2\beta_1 + cos^2\gamma_1 = 1, \quad (2)$$

$\alpha_1 = 90^0 - \alpha;\ \beta_1 = 90^0 - \beta$ и $\gamma_1 = 90^0 - \gamma$
$cos\alpha_1 = sin\alpha;\ cos\beta_1 = sin\beta$ и $cos\gamma_1 = sin\gamma$.

Поэтому *2*- значение преобразуем так:

$$sin^2\alpha + sin^2\beta + sin^2\gamma = 1, \quad (3)$$

$sin^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$; $sin^2\beta = 1 - cos^2\beta$ и $sin^2\gamma = 1 - cos^2\gamma$:

3- значение приводим в такой вид:

$(1 - cos^2\alpha) + (1 - cos^2\beta) + (1 - cos^2\gamma) = 1$:

$3 - cos^2\alpha - cos^2\beta - cos^2\gamma = 1$.

Упростив это значение, приводим нижеследующую:

$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 2$

Из *1*- значение имеем $u = \cos\alpha; v = \cos\beta$ и $w = \cos\gamma$, поэтому:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2 \tag{4}$$

4-значение считается основной формулой аксонометрической проекции. Она является общим для ортогонального параллельного аксонометрического проецирования. Например, на фронтальной проекции натуральной координатной системы *OXYZ* имеем $u = w = 1$ и $v = 0$. Следовательно: $1^2 + 0^2 + 1^2 = 2$.

Поэтому уравнение *4* можно считать математическим модулем основной теоремы параллельной прямоугольной аксонометрии, то есть теоремы Гаусса:

Теорема - *1*: Сумма квадратов коэффициентов искажения осей в параллельной прямоугольной аксонометрии равна *2*.

Потому что оси *X', Y', Z'* в аксонометрической системе совпадают с радиус - векторами (ℓ, m, n) треугольника следов. И они как комплексные числа $i^2 + 1 = 0$ имеют значения, сумма которых равно *0* или могут быть больше этого.

Если угол направления проецирования φ не равна нулю, то она *(s)* находится относительно аксонометрической - картинной плоскости наклонно, (рис.3) и сумма квадрата длины радиус-вектора аксонометрических осей равняется *2* и на $ctg\ \varphi$ больше, [3,4].

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2 + ctg\ \varphi = 2 + n, \tag{5}$$

Здесь: $ctg\ \varphi = n$ и $n = 0 \div \infty$.

В *5*-уравнений равенство двум получится, если $\varphi = 90^0$ т.е. в прямоугольной параллельной аксонометрии.

Следовательно, радиус-векторы Гаусса является ортогональной параллельной проекцией Декартовой системы координатных плоскостей $OXYZ$ в пространстве. Это условие считается достаточным и необходимым для образования аксонометрической системы.А в косоугольной аксонометрии$ctg\ \varphi = 0 \div \infty$, т.е.:

$$u^2 + v^2 + w^2 > 2 \qquad (6)$$

Из этого следует следующая теорема косоугольной аксонометрической проекции:

Сумма квадратов коэффициентов искажения в косоугольной параллельной аксонометрии больше чем *2*.Потому что значение $ctg\varphi$ будет стремиться к увеличению до бесконечно неизвестной величины (<∞).Посмотрим это на рисунках *3* и *4*. Для этого через точку O проводим восемь произвольных направлений проецирования и определяем как O', восемь проекции $O_1', O_2', O_3', ..., O_8'$точки Oна аксонометрической плоскости P_A (рис. 4). Так же на рисунке *4* показаны соответствующие величины суммы квадратов расстоянии от вершин треугольника следов до каждого. Если проекция начала координат O (как O_1', O_2', O_3') окажется внутри или на окраине окружности, вписанного в треугольник ABC, то $ctg\ \varphi$ изменится от *0* до *0,5*, то есть *6*-выражение равно в пределах $2 \div 2.5$.

Если проекция начала координат O находится (как O_4', $O_5' \equiv B$, O_6') внутри или в пределах черты окружности, описанного на треугольник ABC, то *6*- выражение равно в пределах $2{,}5 \div 4$.

Если проекция начала координат O находится (как O_7' и O_8') вне окружности описанного на треугольник ABC, то *6*-выражение увеличится от *4* до бесконечности.Сопоставляя вышеизложен-ные теоремы с теоремами Польке и Польке – Шварца, которые применялись до сей поры, считаем нужным пересмотреть и усовершенствовать теорем Гаусса, Польке и Польке-Шварца. Так как в этих двух последних теоремах некоторые слова и высказывания не исключают сомнения.

Эти теоремы были изложены (предложены) так:

Теорема Польке: Любые три отрезка, выходящие из одной точки на плоскости, могут быть приняты за параллельные проекции трех равных и взаимно перпендикулярных отрезков в пространстве.

Теорема Польке – Шварца:

Любой полный четырехугольник на плоскости всегда можно рассматривать как параллельную проекцию тетраэдра, подобного заданному. Тетраэдр – в данном случае трехгранная пирамида произвольной формы [4].

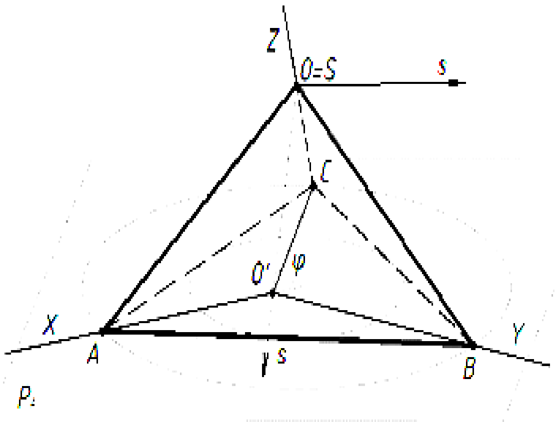

Рисунок 3

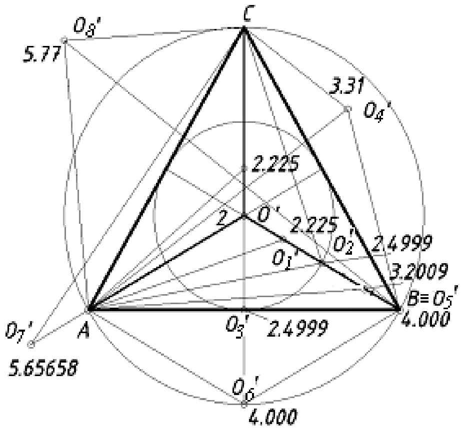

Рисунок 4

Поэтому проанализировав эти теоремы и креативно подойдя к ним, убрав выше изложенные сомнительные выражения, можно прийти к следующему новому усовершенствованному изложению:

Три отрезка произвольной длины, которые исходят от одной точки, лежащей внутри или снаружи равностороннего треугольника следов на аксонометрической плоскости и проходящие через его вершины, являются параллельной или косоугольной проекцией Декартовой системы с равными осями координат. Эту теорему назвали основной теоремой аксонометрической системы проецирования, теоремой Гаусса и Польке-Шварца. Потому что эта усовершенствованная теорема содержит смысл и сущность теорем этих учёных.

И эта теорема, без каких либо сомнений, является настоящей теоремой прямоугольной параллельной проекцией Декартовой системы координатных плоскостей в пространстве.

В результате выше проведённых исследований, установлены следующие отношения между Декартовой и аксонометрической системами:

1. Аксонометрическая двумерная система проецирования, *(O'X'Y'Z')* является проекцией пространства Декартовой трёхмерной системы *(OXYZ)*. Точка O' является параллельной проекцией точки O, начала натуральных осей координат. Аксонометрические оси координат *(O'X', O'Y', O'Z')* являются параллельными проекциями натуральных координатных осей OX, OY, OZ равной длины. Треугольник следов *(ΔABC)* является общей для Декартовой и аксонометрической системы. И они непосредственно связаны с направлением проецирования$s \equiv OO'$, проходящей под прямым или косым углом плоскости аксонометрии-картины.

2. Виды (спереди, сверху и слева) объектов являются частным случаем аксонометрической системы проецирования. Для этого достаточно взять направление проецирования параллельно к осям X или Y или Z.

3. Впервые с помощью теоремы Гаусса обоснована основная теорема параллельного прямоугольного (ортогонального) и косоугольного аксонометрического проецирования.

4. На основании теоремы Гаусса, Польке и Польке-Шварца усовершенствовано изложение основной теоремы параллельного аксонометрического проецирования, и эту теорему назвали основной теоремой системы аксонометрического проецирования, теоремой Гаусса и Польке-Шварца.

Список литературы

1. Е.А.Глазунов, Н.Ф.Четверухин. Аксонометрия. - М.: Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1953. - 291 с.
2. О.Гордон и др.Курс начертательной геометрии. - М.: Наука, 1988. - 270 с.
3. В.Е.Михайленко, А.М.Пономарев. “Инженерная графика”. – Киев:ВИЩАШКОЛА, 1980. -234 с.

4. С.А.Фролов. Начертательная геометрия. - М.: Машиностроение, 1978. - 269 с.

У.Т.Рихсибаев[1], К.Маликов[2]

[1]*Ташкент суару және ауыл шаруашылығын механикаландыру инженерлері институты,Ташкент,Өзбекстан*
[2]*Низами атындағы Ташкент мемлекеттік педагогикалық университеті, Ташкент,Өзбекстан*

Гаусс және Польке-Шварц теоремасы, аксонометриялық жүйенің параллель тікбұрышты проекцияның негізгі теоремасы ретінде

Аннотация:Мақалада үшөлшемді Декарт және екі-өлшемді аксонометриялық жүйелерінің параллель проекциялаудағы өзара қатынастарын талқылау мәселелері ғылыми-зерттеу жұмыстарының нәтижелері келтірілген. Сонымен қатар Гаусс, Польке және Польке-Шварц теоремасының біртұтас теоремасы жасалынған.

Кілт сөздер:аксонометрия, абстрактты, кескін, көркемөнер туындысы, координаталық жазықтықтар, Декарт система координаталық жазықтықтар жүйесі, іздер үшбұрышы, бұрмалану коэффициенттері, аксонометриялық осьтер.

U.T.Rihsibaev[1], K.Malikov[2]

[1]*Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, Tashkent, Uzbekistan*
[2]*Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural MechanizationEngineers, Tashkent, Uzbekistan*

Gauss and Polke-Schwartz theorem, as the main theorem of parallel rectangular projection axonometric system

Abstract: This article presents the results of research work on the study of the relationship between the parallel projection of the Cartesian system of three-dimensional and axonometric two-dimensional. As well as creatively analyzing the Gauss, Polke and Polke-Schwartz theorems, a unified axonometric theorem, the Gauss and Polke-Schwartz theorems were developed.

Key words: axonometriya, abstract, demonstrative scene, work of art, planes of the coordinates, Deckard system of the coordinate planes, triangle trace, factors of the distortion, axonometric axis, directions projections.

References

1. GlazunovE.A., ChetverukhinN.F.Aksonometriya [Axonometry](Moscow, Gos. izd-vo tekhniko-teoret. lit., 1953). [in russian]
2. Gordon O. et al.Kurs nachertatel'noy geometrii [Course of Descriptive Geometry] (Moscow, Nauka, 1988). [in russian]
3. Mikhaylenko V.E., Ponomarev A.M.Inzhenernaya grafika [Engineering graphics] (Kiev, Visha shkola, 1980). [in russian]
4. Frolov S.A.Nachertatel'naya geometriya[Descriptive geometry] (Moscow, Mashinostroyeniye, 1978). [inrussian]