ТӨРТБҰРЫШТАР КЛАССИФИКАЦИЯСЫ, ОЛАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӘНЕ ҚОЛДАНЫЛУЛАРЫ

Аманжол Нұрманұлы НҰРЛЫБАЕВ

Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университетінің профессоры, физика-математика ғылымдарының кандидаты

Есентай Тұңғышбекұлы БЕКЖІГІТОВ

Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университетінің физика-математика ғылымдарының кандидаты

Жазықтықтағы фигуралар ішіндегі қарапайымдылығы жағынан үшбұрыштардан кейінгі орынды иеленетін төртбұрыштар болып табылады, сондықтан да бұл фигуралар едәуір жақсы зерттелген. Дегенмен де, (бір таңғаларлығы!) төртбұрыштарға қатысты қолданыстағы терминологиялар мен оларды классификациялау (жіктеу) толыққанды емес, тіпті кей жағдайларда дөрекі қателіктер де орын алады. Мысалы, төменде келтірілген төртбұрыштар классификациясына (Геометрия-8», авт. Ж. Юсупов, С. Заурбеков, «Мектеп» баспасы, 2004 жыл) назар аударыңыз!

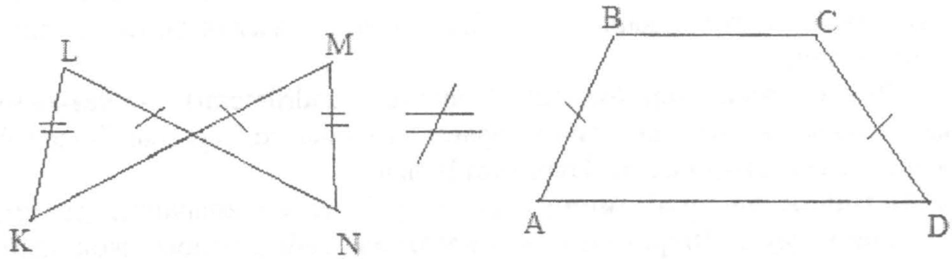
Біздің зерттеуімізде белгілі геометриялық объектілер мен түсініктерге қатысты байырғы грек-латын терминологияларын пайдалана отырып, қолданыста жүрген классификацияларда жоқ фигураларға байланысты жаңа (қызықты) нәтижелер анықталды.

Дөңес төртбұрыштар классификациясы

Төртбұрыштарды классификациялау олардың негізгі екі сипаттамалық белгілері арқылы жүзеге асырылады. Бірінші – қабырғаларының параллельдігі, екінші диагональдарының перпендикулярлық белгісі. Екінші белгі тамаша қасиеттерге ие төртбұрыштар – **дельтиумдар** мен дербес жағдайда квадрат және ромб болып табылатын **дельтоидтардың** көптеген түрлерін айқындауға мүмкіндік береді. Бұдан әрі біз төртбұрыштарды классификациялауда тек дөңес төртбұрыштарды қарастырамыз, себебі дөңес емес төртбұрыштарды зерттеу солар арқылы жүзеге асырылады.

Бұл зерттеулерді мейлінше нақ, дұрыс, әрі ықшамды болып табылатын латын терминологиясын пайдалана отырып жүргізген жөн. Орысшаға, одан әрі қазақ тіліне аудару барысында, кейде, эттеген-ай дегізерлік қателер жіберіледі. Айталық, антипараллелограмм (antiparallelogram) тең бүйірлі трапеция деп қате түсіндіріледі [1,2], ал шын мәнінде *antiparallelogram* - тақ немесе жұп нөмірлі қабырғалары өзара тең, бірақ параллель емес төртбұрыш [1].

Анықтамадан антипараллелограммның (суретте - KLMN) дөңес емес, ал тең бүйірлі трапецияның (суретте - ABCD) дөңес төртбұрыш, яғни бұлардың әртүрлі фигуралар екендігі шығады. Сонымен антипараллелограм трапецияның бүйір қабырғаларын табандары арқылы емес, диагональдары арқылы қосқаннан шығатын фигура.



Сонымен қатар, ертеректе қолданыста болған латынша - ***mediatrix, bisectrix, trisectrix, quadratrix*** (қазақ (немесе орыс) тілінде – «медиатриса» (орта перпендикуляр), «биссектриса», «трисектриса», «квадратриса») және т.с.с. терминдердің сөзбе-сөз калькасын пайдалануда оң үрдіс болар еді.

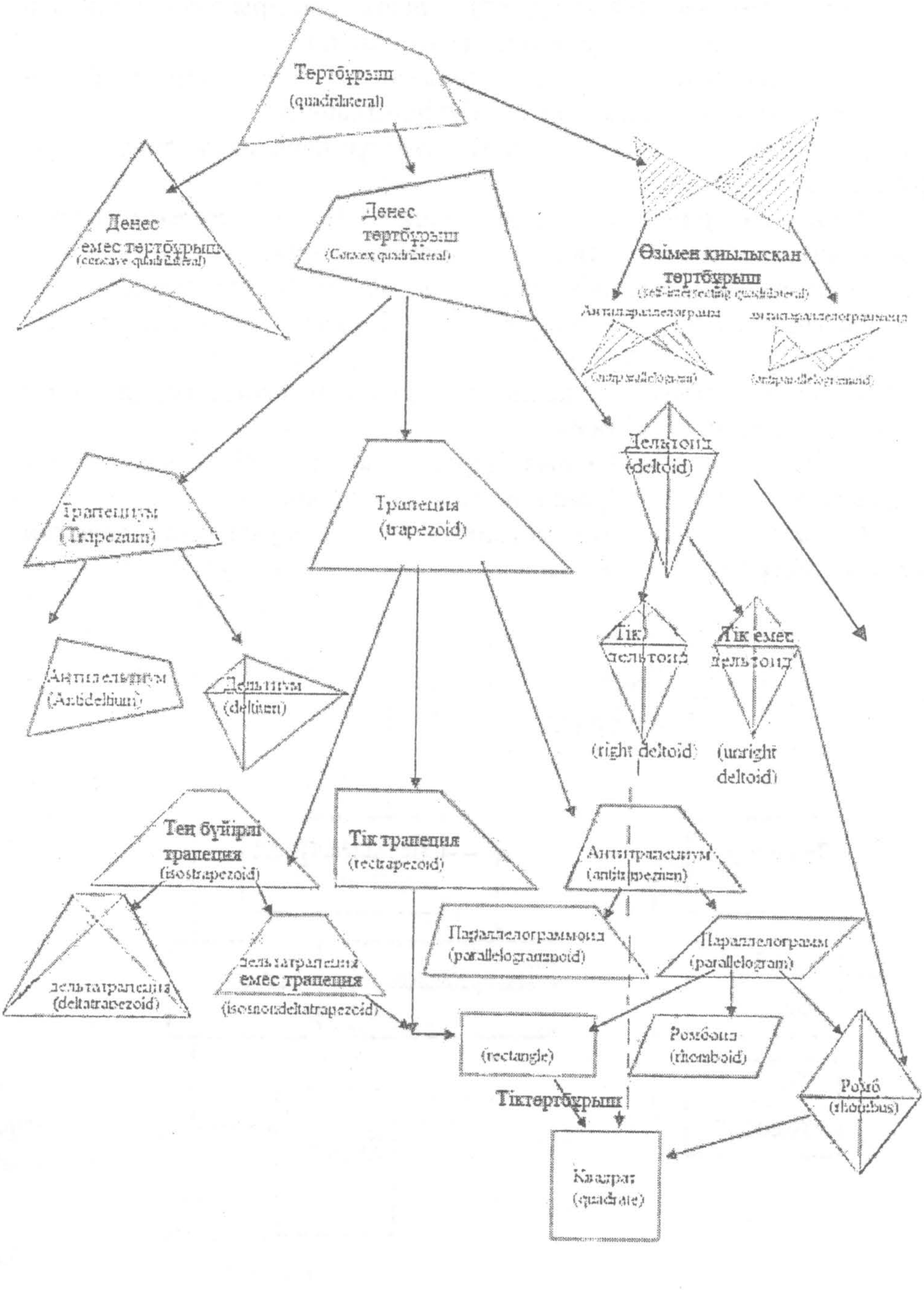
Мағынасы жағынан әр түрлі ***trapezium*** және ***trapezoid*** терминдерінің орысша немесе қазақша аудармаларының қисынсыздығын көрсетейік. Орыс (қазақ) тілдерінде бұл сөздердің айтылуы ұқсас, себебі тілдің ережесі бойынша *oid* және *ium* жұрнақтары айтылу кезінде түсіп қалады. Ал латын тілінде жұрнақтар постпозитивті және постнегативті жалғаулардың рөлін атқарады. Мысалы, ***senatus populusque*** (сенат және халық) сөз тіркесінде *que* постпозитивті жалғауын алып тастаса, онда сенаттық халық деген мағынасыз сөз тіркесі шығады. Яғни, бұл жағдайда *que* жұрнағы «және» сөзін алмастырады, ал латын тілінде постпозитивті жалғау болып табылады [4, 41б.]. Дәл осылайша, *oid* - латын тілінде «емес» постнегативті жалғау. *Trapezium* – параллель қабырғалары болмайтын төртбұрыш, ал *trapezoid* – параллель қабырғалары болуы мүмкін төртбұрыш, яғни *oid* жалғауы бұл жерде *trapezium* сөзін теріске шығаратын роль атқарады.

Ұсынылып отырған классификацияда қолданыстағы жүрген классификацияларға қарағанда елеулі өзгешеліктер бар. Зерттеудің мақсаты – төртбұрыштардың көңілге қонымды, бір тәртіпке келтірілген, әрі толық классификациясын және олардың жаңа түрлері – дельтоидтарды, дельтиумдарды, дельтатрапецияларды анықтау. Сонымен қатар, төртбұрыштардың бұрын қарастырылмаған түрлерін енгізу және олардың қосымша қасиеттерін зерттеу.

Классификацияға түсініктемелер

1. **Төртбұрыш** (quadrilateral) – төрт буынды тұйықталған сынық сызықпен шектелген жазық фигура.
2. **Дөңес төртбұрыш** (convex quadrilateral) – кез-келген қабырғасын қамтитын түзуге қарағанда бір жарты жазықтықта жататын төртбұрыш.
3. **Дөңес емес төртбұрыш** (concave quadrilateral) – кез-келген қабырғасын қамтитын түзуге қарағанда балық қабырғасы бірдей бір жарты жазықтықта жатпайтын төртбұрыш.
4. **Антипараллелограммоид** – тең бүйірлі емес антипараллелограмм.
5. **Трапециум** (trapezium) – параллель қабырғалары жоқ дөңес төртбұрыш.
6. **Трапеция** (trapezoid) – параллель қабырғалары бар дөңес төртбұрыш.
7. **Дельтоид** (deltoid) – диагональдары ортогональ және олардың біреуі симметрия осі болып табылады. Дельтоидтың тағы бір аты балалар ұшырып ойнайтын «батпырауық» немесе «әуе жыланы» - *kite*.
8. **Дельтиум** (deltium) – диагональдары ортогональ, бірақ симметрия осі емес трапециум; бұл анықтамадан дельтиумның дельтоидқа қарама-қарсы фигура екендігі көрініп тұр (постнегативті *oid* жалғауы арқылы), яғни асимметриялы дельтоид.
9. **Антидельтиум** (antideltium) – диагональдары перпендикуляр емес трапециум.
10. **Тік дельтоид** (right deltoid) – тік бұрышы бар дельтоид.
11. **Тік емес дельтоид** (unright deltoid) – тік бұрышы жоқ дельтоид.
12. **Тік трапеция** (right trapezoid) – тік бұрышы бар трапеция.
13. **Тең бүйірлі трапеция** (isosceles trapezoid, немесе қысқаша isostrapezoid) – бүйір қабырғалары тең трапеция.

Жазық төртбұрыштар классификациясы



14. **Антитрапециум** (antitrapezium) – жалпы түрдегі трапеция.

15. **Дельтатрапеция** (deltatrapezoid) – диагональдары перпендикуляр тең бүйірлі трапеция, немесе, қысқаша, δ-трапеция.

16. **Дельтатрапеция емес трапеция** (nondeltatrpezoid) – диагональдары ортогональ емес тең бүйірлі трапеция.

17. **Параллелограмм** (parallelogram) – екі жұп параллель қабырғалары бар антитрапециум.

18. **Параллелограммоид** (parallelogramoid) – параллелограмм болмайтын антитрапециум (жалпы түрдегі трапеция).

19. **Ромб** (rhombus) – тең қабырғалы дельтоид (параллелограмм).

20. **Тіктөртбұрыш** (rectangle) – барлық бұрыштары тік параллелограмм (тік трапеция).

21. **Ромбоид** (rhomboid) – жалпы түрдегі параллелограмм, (яғни тік төртбұрыш та емес, ромб та емес).

22. **Квадрат** (quadrate) – барлық бұрыштары тік ромб, немесе барлық қабырғалары тең тік төртбұрыш, немесе тік δ - трапеция.

Салыстыру үшін «Геометрия - 8» [6] оқулығында берілген классификацияны келтіре кетейік:

Дельтиумдар мен дельтоидтардың негізгі қасиеттері

1-теорема. Егер *ABCD* төртбұрышының диагональдары өзара қиылысу *E* нүктесінде табандарының қатынасындай кесінділерге бөлінсе, яғни:

$$k = AE/EC = DE/EB = AD/BC$$

теңдігі орындалса, онда мұндай төртбұрыш трапеция болып табылады.

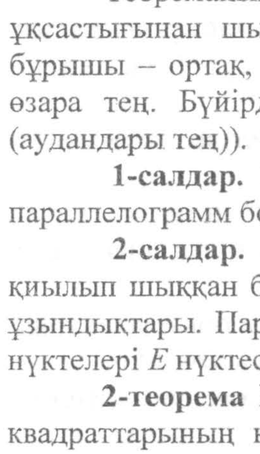
Теореманың дұрыстығы *AED* және *BEC* үшбұрыштарының ұқсастығынан шығады (үшбұрыштың бұрыштарының теңдігінен: *E* бұрышы – ортақ, ал қалған бұрыштары вертикаль бұрыштар ретінде өзара тең. Бүйірдегі *ABE* және *CED* үшбұрыштары тең шамалас (аудандары тең)).

1-салдар. Егер $k = 1$ болса, онда $AD = BC$, яғни *ABCD* - параллелограмм болады.

2-салдар. Трапецияның орта сызығының диагональдармен қиылып шыққан бөлігі: $FG = (a - b)/2$, мұндағы a, b – табандарының ұзындықтары. Параллелограмм жағдайында $FG = 0$, себебі F және G нүктелері E нүктесімен беттесіп кетеді.

2-теорема Егер төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғаларының квадраттарының қосындысы тең болса, яғни $a^2+ c^2 = b^2+d^2$, онда мұндай төртбұрыш дельтиум болып табылады.

Дәлелдеу: Косинустар теоремасын пайдалана отырып, төмендегі формулаларды жазайық:



$a^2+c^2 = AO^2+OD^2-2AO\bullet DO\ \cos\varphi+BO^2+CO^2-2\ CO\bullet OD\ \cos\varphi = b^2+c^2 = AO^2+ +CO^2-2AO\bullet BO\ \cos(180-\varphi) + BO^2+ OD^2- 2CO\bullet OD\cos(180-\varphi)$ $\Leftrightarrow$ $AO^2+OD^2-2AO\bullet DO\ \cos\varphi+BO^2+CO^2-2\ CO\bullet OD\ \cos\varphi = AO^2+ CO^2+$
$+2AO\bullet BO\cos\varphi + BO^2+ OD^2+ 2CO\bullet OD\cos\varphi$.

$2\ AO\bullet BO\cos\varphi+ 2\ CO\bullet OD\cos\varphi+2\ AO\bullet DO\cos\varphi+2\ CO\bullet OD\cos\varphi=0$

$\mathrm{Cos}\ \varphi(AO\bullet BO+ CO\bullet OD+ AO\bullet DO+ CO\bullet OD)=0$

$\Rightarrow \cos\varphi=0$. Демек, $\varphi=90^\circ$, яғни *ABCD* төртбұрышының. диагональдары ортогональды, олай болса, анықтама бойынша *ABCD* төртбұрышы – дельтиум.

Кері тұжырым да дұрыс болып табылады:

3-теорема. Егер төртбұрыш дельтиум болса, онда, $a^2+ c^2 = b^2+d^2$ теңдігі орындалады.

Дәлелдеу: *AC* және *BD* түзулері *O* нүктесінде қиылыссын делік. Дельтиумның диагональдарының ортогональдық қасиеттерін пайдаланып, Пифагор теоремасы бойынша
$AB^2 = AO^2 + OB^2$; $BC^2 = BO^2 + CO^2$; $AD^2 = AO^2 + DO^2$; $DC^2 = DO^2 + CO^2$ теңдігі шығады. Осыдан: $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

1 және *2*-ші теоремалардың тұжырымдарын біріктіріп **дельтиумдықтың критерийін** аламыз:

4-теорема. Төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғаларының квадраттарының қосындысы тең болса ғана, яғни $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ теңдігі орындалса ғана ол дельтиум болып табылады.

Диагональдары өзара перпендикуляр дельтоидтар үшін де *3*-теорема орынды.

1-салдар. Төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғаларының квадраттарының қосындысы тең болса, яғни $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ және оның диагоналы симметрия осі болса ғана дельтоид болып табылады.

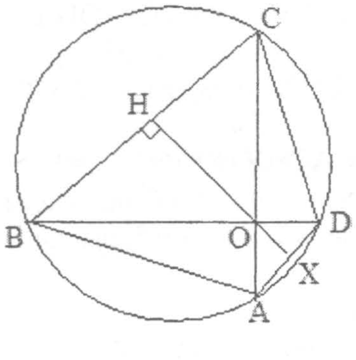
2-салдар. Дельтиум (дельтоид) үшін $a \cdot c = b \cdot d$ шарты орындалса ғана оған іштей шеңбер сызуға болады.

3-салдар. Қабырғалары бірдей дельтоидтардың аудандары әртүрлі болуы мүмкін.

Мысалы, қабырғасы $3\sqrt{2}$ болатын квадраттың ауданы *18*-ге, қабырғасы $3\sqrt{2}$, диагональдары $2\sqrt{17}$ және *2* болатын ромбтың ауданы $2\sqrt{17}$ - ге тең.

Периметрлері бірдей төртбұрыштардың арасындағы ауданы ең үлкені квадрат екенін көрсетуге болады.

5-теорема. Егер шеңберге іштей сызылған дельтиумның диагональдары O нүктесінде қиылысса, онда осы нүкте арқылы өтетін және дельтиумның бір қабырғасына перпендикуляр түзу оның қарама-қарсы қабырғасын қақ бөледі.

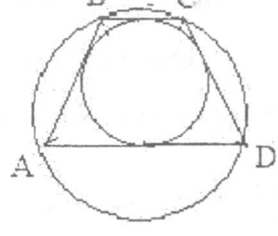


Дәлелдеу:
ABCD төртбұрышында *AC* және *BD* диагональдары өзара перпендикуляр, ал *OH* түзуі *BC* қабырғасына перпендикуляр және *AD* қабырғасын *X* нүктесінде қияды.
$\angle DOX = \angle BOH = \angle OCH = \angle ACB = \angle ADB = \angle XDO$. ΔXOD – тең бүйірлі

үшбұрыш. Дәл осылайша, ΔXAO – тең бүйірлі үшбұрыш. Сондықтан $XA = XO = XD$.

6-теорема. Егер төртбұрыштың бір мезетте сырттай және іштей сызылған шеңберлері болса, онда төртбұрыштың ауданы $S=\sqrt{abcd}$ формуласы арқылы есептеледі.

Дәлелдеу:
Төртбұрыштың іштей сызылған шеңбері болғандықтан оның қарама-қарсы қабырғаларының қосындылары өзара тең. Ал жарты периметрі $p=\frac{a+b+c+d}{2}$, $p - a=\frac{b+c+d-a}{2}=c$. Дәл осылай, $p - b = d$, $p - c = a$, $p - d= b$. Осы өрнектерді Брахмагупта (Brahmagupta, VI AD) формуласына қоямыз: $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, мұндағы $p = \frac{a+b+c+d}{2}$, нәтижеде $S=\sqrt{abcd}$ формуласы табылады.



7-теорема. Егер төртбұрыш сырттай сызылған шеңбердің ішінде орналасса және оның іштей сызылған шеңбері болса, онда ол жалпы түрдегі төртбұрыш, немесе изотрапеция болып табылады.

Салдар. Егер төртбұрыштың сырттай да, іштей де сызылған шеңбері және олардың центрлері бірдей нүктеде болса, онда мұндай төртбұрыш квадрат болып табылады.

8-теорема. Дельтиум мен дельтоидтың аудандары $S=\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ формуласымен анықталады, мұндағы d_1 және d_2 – төртбұрыштың диагональдары.

Дәлелдеу: Дөңес төртбұрыштың ауданының формуласы $S = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi}{2}$ (1), мұндағы φ – d_1 және d_2 диагональдарының арасындағы бұрыш [3]. Дельтиум мен дельтоидтың анықтамасы бойынша олардың диагональдары өзара перпендикуляр. Олай болса, $\sin\varphi = 1$. Онда (1) формуладан $S=\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ екендігі шығады.

Жоғарыда келтірілген классификация бойынша ромб пен квадрат дельтоидтың дербес түрі болып табылады. Сондықтан олардың аудандары да $S=\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ формуласымен анықталады.

Квадратта $d_1 = d_2 = a\sqrt{2}$ болғандықтан бұл формула $S = a^2$ түрінде жазылады.

Келесі теорема *8*-теореманың салдары ретінде орын алады:

9-теорема. Дельтатрапецияның ауданы оның орта сызығының квадратына тең:

$$S = \left(\frac{a+b}{2} \right)^2.$$

10-теорема. Қабырғалары $a \cdot c = b \cdot d$ шартын қанағаттандыратын дельтатрапецияға сырттай және іштей шеңберлер сызуға болады, әрі олардың дөңгелектерінің аудандары мен трапецияның ауданы арасында мынадай қатынас орындалады: $S' : S_{mp} : S = \frac{\pi}{2} : 1 : \frac{\pi}{4}$.

Дәлелдеу: Сырттай сызылған шеңбердің (оның диаметрі трапецияның диагоналіне тең) ауданы $S' = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{2} h^2$, себебі *9*-теорема бойынша $S_{mp} = \frac{d^2}{2} = h^2$, ал іштей сызылған дөңгелектің ауданы $S = \pi r^2 = \frac{\pi}{4} h^2$ (себебі $r = \frac{h}{2}$).

Мақаланың көлеміне қойылатын шектеу дельтиум, дельтоид және трапециялардың өзге де қасиеттеріне байланысты фактілерді келтіруге мүмкіндік бермейтіні өкінішті-ақ. Жоғарыда толыққанды қарастырылмай кеткен төртбұрыштардың көптеген түрлерінің бірі – дельтиумдар. Олар практикалық қолданыста көп кездесетін фигуралардың қатарына жатады (ол үшін құрылыстарда қолданылатын мұнаралық крандарды көзге елестетіп көрудің өзі де жеткілікті).

Қолданылған әдебиеттер тізімі:

1. Англо-русский словарь математических терминов. Под ред. П.С. Александрова. – 2-е, исправл. и дополн. изд. – М.: Мир,1994 – 416 с.
2. Немецко-русский математический словарь. Под ред. Л.А. Калужнина.- М.: Наука, Физматгиз, 1960.
3. Г.С.М. Коксетер, С.Л. Грейтцер, Новые встречи с геометрией. М.: Мир,1969.
4. Манин Ю.И, Доказуемое и недоказуемое. – М.: «Сов.радио», 1979 – 168с.
5. Большая Советская энциклопедия. 2-е изд. 1994.
6. «Геометрия-8». Ж. Юсупов, С. Зауырбеков, «Мектеп», 2004ж.
7. Нурлыбаев А.Н. Классификация четырехугольников. //В мире образования, 4, 2008.