3. Закон Республики Казахстан «Об образовании» (новая редакция) Создан: 04-12-06 – Изменен: 05-05-08
4. Головинцева В.В. Проблема педагогической деонтологии в наши дни //«Оралдын ғылым жаршысы» «Уральский Научный Вестник». – 2006. – №2
5. К вопросу о деонтологии: журналистика должна быть гуманной //Жоғары оку орындары жүйесінде журналист даярлау мәселелері = Журналистика в системе вузовской подготовки. – Қарағанды, 2004. – С.130-139
6. Жуманкулова Е.Н. Формированиедеонтологической готовности будущих педагогов к работе с детьми девиантного поведения //Автореферат на соискание ученой степени кандидата педагогических наук. – Караганды, 2007.
7. Кудерина А.Е. Формирование деонтологических качеств будущего учителя в процессе профессиональной практики (в условиях педагогического колледжа) //Автореферат на соискание ученой степени кандидата педагогических наук. – Караганды, 2008.
8. Кстати, а вы стрессоустойчивы? Доброжелательны? //Учитель Казахстана. – 2001. – N8-9 С. 26.
9. Гносеология медиаэтики Текст: организационная культура или «Голос совести»? //Вестник Московского университета. Сер.10 Журналистика. – 2002. – N 4.

АРИФМЕТИКАЛЫ-ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ПРОГРЕССИЯ (АГП). ОНЫҢ ҚОСЫНДЫСЫНЫҢ ФОРМУЛАСЫ

Аманжол Нұғманұлы НҰРЛЫБАЕВ

Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университетінің профессоры, физика математика ғылымдарының кандидаты

Ләззат Есентайқызы БЕКЖИГИТОВА
Халықаралық IT университетінің студенті

Жалпы мүшесі сәйкесінше арифметикалық және геометриялық прогрессиялардың (АП және ГП) жалпы мүшелерінің (a_n мен b_n) көбейтінділері болып табылатын (q_n) тізбегі арифметикалы-геометриялық прогрессия (АГП) деп аталады.

1-мысал. $(q_n) = 1;\ 4x;\ 7x^2;\ 10x^3;\ 13x^4,\ldots$ тізбегі АГП болып табылады, себебі *1;4;7;10;13...* сандары, яғни x-тің сәйкес дәрежелерінің алдындағы коэффициенттері (a_n) АП-сын, ал $1;\ x;\ x^2;\ x^3,\ldots$ - (b_n) ГП-ны құрайды.

Жалпы жағдайда АГП-ны былай жазуға болады:
$a_1(a+d)q_1$, $(a+2d)q^2$,…, $[a+(n-1)d]q^{n-1}$, мұндағы d – АГП-ның айырмасы, q – еселігі, q_1 және q_n – шеткі мүшелері:
$q_1=a$, $b_1=1$ және $q_n=a_nb_n=[a+(n-1)d]q^{n-1}$.

АГП АП мен ГП-ның біріктірілуі (комбинациясы) ретінде симметриялықты сақтайды, ал бұл күрделі тізбек сияқты көрінген АГП-ның мүшелерінің қосындысын (S_n-ді) ГП-ның қосындысын есептеудегідей оңай табуға мүмкіндік береді.

1–тұжырым. $S_n = \frac{a-a_nq^n}{1-q} + \frac{dq(1-q^{n-1})}{(1-q)^2}$

Дәлелдеу.
$$S_n = a + (a+d)q + (a+2d)q^2 + ... + [a+(n-1)d]q^{n-1}$$
Өрнектің екі жағын да q-ға көбейтеміз:
$$qS_n = aq + (a+d)q^2 + ... + [a+(n-2)d]q^{n-1} + a_nq_n.$$
S_n-нен $q\,S_n$-ді азайтсақ мынаны аламыз:
$$S_n(1-q) = a + (dq + dq^2 + ... + dq^{n-1}) - a_nq^n .$$
Жақша ішіндегі өрнек мүшелерінің саны $n-1$ болатын геометриялық прогрессияны (ГП) құрайды. Сондықтан
$dq\,(1+q+...+q^{n-2}) = \frac{dq\,(1-q^{n-1})}{1-q}$ Осыны ескере отырып, мынаны аламыз: $S_n(1-q) = a - a_nq^n + \frac{dq\,(1-q^{n-1})}{1-q}$

Бұл өрнектен АГП-ның қосындысының формуласы төмендегіше алынады:
$$S_n = \frac{a-a_nq^n}{1-q} + \frac{dq\,(1-q^{n-1})}{(1-q)^2}.$$

1 – салдар. Егер d = 0 болса, онда АГП кәдімгі ГП-ға айналады: a, aq ,..., aq^{n-1}; бұл ГП-ның қосындысы: $S'_n = \frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a\,(1-q^n)}{1-q}$

2 – салдар Егер d=1 болса, онда АГП қосындысы S''_n болатын (мұндағы $S''_n = \dfrac{a + a_n}{2} n, \quad a, a + d, ..., a + (n-1)d$) арифметикалық прогрессияға (АП) айналады.

АП-ның қосындысының формуласын АГП-ның қосындысының формуласынан қорытып шығару.

АГП-ның қосындысының формуласы $q = 1$ мәнінде анықталмағандықтың $\left[\frac{0}{0}\right]$ түріне әкеледі, себебі S_n-ге арналған өрнектің алымы да, бөлімі де бұл жағдайда нөлге айналады. Сондықтан q -дың 1-ге ұмтылғандағы S_n -нің шегін табу керек:

$$\lim_{q \to 1} \left[\frac{a - a_n q^n}{1 - q} + \frac{dq\left(1 - q^{n-1}\right)}{(1-q)^2} \right] = S''_n = \frac{a + a_n}{2} n.$$

Дәлелдеу.

АГП-ның S_n қосындысын мынадай ыңғайлы түрге келтіреміз:

$$S_n = \frac{a - [a + (n-1)d]q^n}{1 - q} + \frac{dq\left(1 - q^{n-1}\right)}{(1-q)^2} =$$

$$= \frac{\left(a - aq^n - ndq^n + dq^n\right)(1 - q) + dq - dq^n}{(1-q)^2} =$$

$$= \frac{\left(a - aq^n - ndq^n + dq^n - aq + aq^{n+1} + ndq^{n+1} - dq^{n+1} + dq - dq^n\right)}{(1-q)^2}.$$

Сондықтан,

$$S_n (1 - q)^2 = a - aq^n - ndq^n - aq + aq^{n+1} + ndq^{n+1} - dq^{n+1} + dq.$$

Алғашқы S_n -ге орала отырып төмендегідей нәтижеге қол жеткіземіз:

$$S_n = \frac{a(1 - q) - aq^n (1 - q) - ndq^n (1 - q) - dq\left(1 - q^n\right)}{(1-q)^2}$$

$$\lim_{q \to 1} S_n = \lim_{q \to 1} \left[\frac{a(1 - q) - aq^n (1 - q) - ndq^n (1 - q) - dq\left(1 - q^n\right)}{(1-q)^2} \right].$$

Соңғы өрнектен көрініп тұрғандай, $q = 1$ болғанда бөлшектің алымы мен бөлімі нөлге тең болады, яғни анықталмағандықтың $\left[\frac{0}{0}\right]$ түрін аламыз. Оны табу үшін Лопиталь [L´Hospital,1703 жыл] ережесін екі рет қолданып дәлелдеуге тиісті формуланы табамыз: $\lim\limits_{q\to 1} S_n = \left(\dfrac{a+a_n}{2}\right)n.$

Жиі кездесетін қосындылардың формулалары

2–тұжырым. $S_{(m,t)} = \dfrac{a_m - a_t q^t}{1-q} + \dfrac{dq\left(1 - q^{t-m}\right)}{(1-q)^2}.$

Салдар. Егер $m = 1$ және $t = n$ болса, онда АГП-ның алғашқы n мүшелерінің қосындысын аламыз:

$$S_{(1,n)} = S_n = \frac{a_1 - a_n q^n}{1-q} + \frac{dq\left(1-q^{n-1}\right)}{(1-q)^2}.$$

1 – мысал. АГП-ның S_n қосындысын табу керек, яғни $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$. Мұндағы $a = 1$; $d = 1$; $a_n = 1 + n - 1 = n$; $q = x$, сондықтан:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q^n}{1-q} + \frac{dq\left(1-q^{n-1}\right)}{(1-q)^2} = \frac{1-nx^n}{1-x} + \frac{x\left(1-x^{n-1}\right)}{(1-x)^2} =$$
$$= \frac{\left(1-nx^n\right)(1-x) + x\left(1-x^{n-1}\right)}{(1-x)^2} = \frac{1 - x - nx^n + nx^{n+1} + x - x^n}{(1-x)^2} =$$
$$= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

Салдар. Төмендегі жиі кездесетін қосындылар S_n арқылы оңай өрнектеледі:

$$S'_n = x + 2x^2 + ... + nx^n$$
$$S''_n = nx + (n-1)x^2 + ... + x^n.$$

Бірінші қосынды:

$$S'_n = x + 2x^2 + ... + nx^n =$$
$$= x\left(1 + 2x + 3x^2 ... + nx^{n-1}\right) = x \cdot S_n,$$

мұндағы $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$ 1–мысалда есептелген:

$S_n = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$, сондықтан,

$$S'_n = xS_n = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$

$$S'_n + S''_n = (n+1)(x + x^2 + ... + x^n) = \frac{(n+1)(x - x^{n+1})}{1-x}$$ екенін

ескере отырып, екінші қосындыны (S''_n-ті) оңай табамыз:

$$S''_n = \frac{(n+1)(x - x^{n+1})}{1-x} - S'_n.$$

Сөйтіп, төмендегі өрнекті аламыз

$$S''_n = \frac{(n+1)(1-x)(x - x^{n+1}) - nx^{n+2} + (n+1)x^{n+1} - x}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{(n+1)(x - x^{n+1} - x^2 + x^{n+2}) - nx^{n+2} + (n+1)x^{n+1} - x}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{x^{n+2} - (n+1)x^2 + nx}{(1-x)^2}.$$

АГП-ның дербес n қосындыларының қосындысы

1-теорема. Жалпы түрдегі $(g_n) = a_n b_n = [a + (n-1)d]q^{n-1}$ АГП-ның дербес n қосындыларының қосындысы $S_{(n)}$ мынаған тең:

$$S_{(n)} = \frac{(1-q)nq + (d-a)q(1-q^n)}{(1-q)^2} - \frac{dq(nq^{n+1} - (n+2)q^n + nq - n + 2)}{(1-q)^3}.$$

Дәлелдеу.

$$S_{(n)} = \sum_{j=1}^{n} S_j = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{a - a_j q^j}{1-q} + \frac{dq(1 - q^{j-1})}{(1-q)^2}\right] = \left|a_j = a + (j-1)d\right| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\frac{a}{1-q} - \sum_{j=1}^{n}\frac{[a + (j-1)d]q^j}{1-q} + dq\sum_{j=1}^{n}\frac{(1-q^{j-1})}{(1-q)^2} =$$

$$= \frac{an}{1-q} - \frac{a}{1-q}\sum_{j=1}^{n} q^j - d\sum_{j=1}^{n}\frac{(j-1)q^j}{1-q} + \frac{dq}{(1-q)^2}\left[\sum_{j=1}^{n} 1 - \sum_{j=1}^{n} q^{j-1}\right].$$

Осыны ескере отырып, мынаған қол жеткіземіз:

$$S(n) = \frac{an}{1-q} - \frac{a}{1-q} \cdot \frac{q\left(1-q^{n}\right)}{1-q} -$$

$$- d\sum_{j=1}^{n} jq^{j} + \frac{dq\left(1-q^{n}\right)}{(1-q)^{2}} + \frac{dq}{(1-q)^{2}}\left[n - \frac{1-q^{n}}{1-q}\right] =$$

$$= \frac{an}{1-q} - \frac{aq\left(1-q^{n}\right)}{(1-q)^{2}} - \frac{d\left(nq^{n+1} - (n+1)q^{n} + 1\right)}{(1-q)^{3}} +$$

$$+ \frac{dq\left(1-q^{n}\right)}{(1-q)^{2}} + \frac{dq}{(1-q)^{3}}\left[n - nq - 1 + q^{n}\right] =$$

$$= \frac{an(1-q) + (d-a)q\left(1-q^{n}\right)}{(1-q)^{2}} +$$

$$+ \frac{d}{(1-q)^{3}}\left[-nq^{n+1} + (n+1)q^{n} - 1 + nq - nq^{2} - q + q^{n+1}\right] =$$

$$S(n) = \frac{an(1-q) + (d-a)q\left(1-q^{n}\right)}{(1-q)^{2}} +$$

$$+ \frac{d}{(1-q)^{3}}\left[(1-n)q^{n+1} + (n+1)q^{n} + nq^{2} + (n-1)q - 1\right]$$

Салдар. Егер $d = 0$ болса, онда

$$S(n) = \frac{an(1-q) - aq\left(1-q^{n}\right)}{(1-q)^{2}} = \frac{an - anq + aq^{n+1} - aq}{(1-q)^{2}} =$$

$$= \frac{a\left(q^{n+1} - (n+1)q + n\right)}{(1-q)^{2}},$$

яғни ГП-ның дербес қосындыларының қосындысы $S(n)$-ді аламыз. Егер $q = 1$ болса, онда $q \to 1$ $S(n)$ өрнегінен шекті таба отырып, АП-ның дербес қосындыларының қосындысын аламыз:

$$S(n) = \sum_{j=1}^{n} S_j = aC_{n+1}^{2} + dC_{n+1}^{3}.$$

Шексіз АГП-ның қосындысы

2-теорема $|q|<1$ болғанда шексіз АГП-ның қосындысы S мынаған тең:

$$S = \frac{a}{(1-q)} + \frac{dq}{(1-q)^2}.$$

Дәлелдеу.

$|q| < 1$ болған кездегі $S = \lim\limits_{n \to \infty} S(n)$ шегін табайық.

$$S = \lim_{n \to \infty, |q|<1} S(n) = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{a - a_n q^n}{1-q} + \frac{dq\left(1 - q^{n-1}\right)}{(1-q)^2} \right] =$$
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{a}{1-q} - \lim_{n \to \infty} \frac{a_n q^n}{1-q} + d \lim_{n \to \infty} \frac{q\left(1 - q^{n-1}\right)}{(1-q)^2}.$$

$\lim\limits_{n \to \infty, |q|<1} q^n \to 0$ болғандықтан, $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n q^n}{1-q} = 0$ болады. Дәл сол сияқты:

$$d \lim_{n \to \infty} \frac{q\left(1 - q^{n-1}\right)}{(1-q)^2} = \frac{dq}{(1-q)^2}.$$

Сондықтан қорытынды формула төмендегідей жазылады:

$$S = \lim_{n \to \infty, |q|<1} S(n) = \frac{a}{1-q} + \frac{dq}{(1-q)^2}.$$

Салдар. Егер $d = 0$ болса, онда АГП қосындысы $S = \dfrac{a}{1-q}$ болатын кәдімгі шексіз ГП-ға ауысады.

Қолданылған әдебиеттер тізімі:

1. Б.Л. Ван дер Варден Алгебра Москва. Наука, 2003.
2. Нурлыбаев А.Н. Прогрессии, их свойства, обобщения и приложения //Физмат, № 2-5, 2007.