ИНЖЕНЕРЛІК ГЕОМЕТРИЯДАҒЫ ЖОРЫМАЛ ШЕШІМДЕРДІҢ ГРАФИКАЛЫҚ КӨРІНІСТЕРІ

Уәлихан Қажиакбарұлы КУСЕБАЕВ

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің доценті, техника ғылымдарының кандидаты

Көптеген геометриялық есептердің шешімдері накты сандармен өрнектелмей қала беретін жағдайлар жиі болып тұрады. Барлық есептерді тек Евклид геометриясы аясында қарастырып үйренген адамға мұндай есептер шешілмейтін, жауабы жоқ, мағынасыз болып көрінуі мүмкін. Алайда, олардың жорымал сандар арқылы шығатын жауаптары, жорымал нүктелер арқылы көрсетілетін графикалық кескіндері болатындығы көп жағдайларда ескерілмей қалатын кездері бар екені анық..

Жалпы, 16-ғасырдың ортасынан, Милан университетінің математика профессоры итальяндық Джироламо Карданодан басталған жорымал сан түсінігінің өзі 19-ғасырдың ортасына таман ғана математикалық ойлар жүйесінде өз орнын тапқандай.

Қазіргі таңда жорымал сандар швейцариялық ғұлама математик Л. Эйлер енгізген $i^2 = -1$, ирландтық У.Гамильтон ұсынған $z = a + bi$ түрінде және немістің ұлы математигі, «математиканың падишасы» К.Гаусстың атауымен «комплекс сандар» болып қабылданған [1].

Жазықтықта орналасқан нүктенің координаталарының ең болмаса бірі жорымал сан болып келсе, онда нүктені жорымал нүкте деп атайды. Осы жерде жорымал нүктелердің координаталары қандай варианттарда кездесуі мүмкін және олар қалай аталатынын айта кеткен жөн:

$(a; bi)$, $(ci; d)$ – жартылай жорымал нүктелер;

$(ai; bi)$ - жорымал нүктелер;

$(a; b+ci)$, $(a+bi; c)$ – жартылай комплекс нүктелер;

$(a+bi; c+di)$ – комплекс нүктелер;

$(a+bi; ci)$, $(ai; b+ci)$ – жорымал-комплекс нүктелер.

Егер геометриялық есептердің графикалық салынуы тек Евклид геометриясында қарастырылып, басқа, Риман, Минковский және т.б.

геометриялары сөз болмайтын жағдайда, жоғарыда аталған түрлі атаудағы нүктелерді жалпылама түрде жорымал нүктелер деп атай салуға әбден болады [2].

Жоғары оқу орнының студенттері Сызба геометрия, Инженерлік графика, Компьютерлік графика сияқты графикалық пәндерді оқу, меңгеру барысында жорымал нүктелер, жорымал қисықтар, бір сөзбен айтқанда жорымал элементтер кездесіп қалады. Олай болса, олардың пайда болу жолдарын, оларды қолдану әдістерін оқу барысында толық меңгерген абзал.

Бір мысал арқылы жорымал нүктелермен танысалық.

Бір-бірімен қиылыспайтын бір g шеңбері және l түзуі берілген (1-сурет).

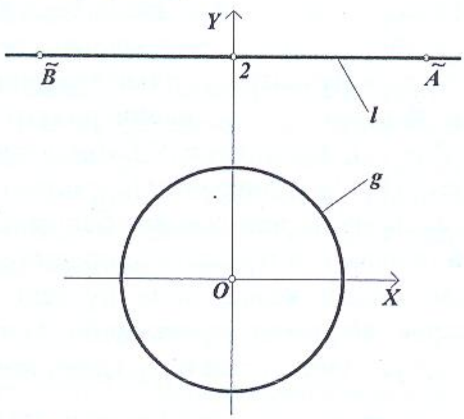
$g:\ x^2 + y^2 = R^2$

$l:\ \ y = a$

Екеуінің қиылысу нүктелерін табу үшін

$$x^2 + y^2 = R^2$$
$$y = a$$

теңдеулер жүйесін шешу қажет.



1 сурет – Шеңбер мен түзудің жорымал нүктелерде қиылысуы

Қиылысу нүктелерінің координаталарын сан күйінде алу үшін R және a параметрлеріне сандық мән берейік. Мысалы:

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$y = 2.$$

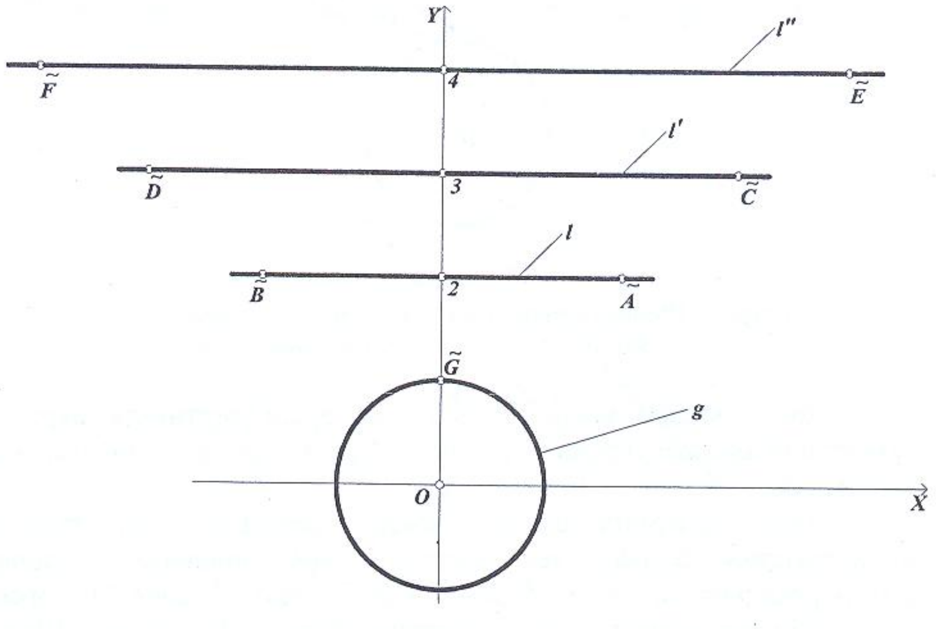
Сонда, $x^2 = -3$ болып, шешімі $x_{1,2} = \pm\sqrt{-3}$ болады. Түбірдің астындағы санның таңбасы «минус» болып қалды. Енді $i^2 = -1$ өрнегін пайдаланып, қиылысу нүктелерінің $x_1 = +\sqrt{3}\ \ i$, $x_2 = -\sqrt{3}\,x_2\ \ i$ екі абсциссаларын табамыз.

Сонымен, g қисығы мен l түзуінің өзара қиылысу нүктелері $\tilde{A}$ $(x_1 = +\sqrt{3}\ \ i,\ 2)$, $\tilde{B}$ $(x_2 = -\sqrt{3}\ \ i,\ 2)$ анықталды. 1 – суретте $\tilde{A}$ және $\tilde{B}$ нүктелерін кескіндеу үшін i қосымшасын шартты түрде модулі бірге тең, бағыты айнымалы бірлік вектор ретінде аламыз. Басқаша айтқанда, комплекс жазықтыққа өтпей, әлі декарттық координаталар жүйесі бар Евклид жазықтығындамыз деп есептеген дұрыс.

Табылған $\tilde{A}$ және $\tilde{B}$ нүктелерінің геометриялық мағынасын анықтау мақсатында, берілген шеңбермен екінші l', үшінші l'' түзулерінің қиылысу нүктелерін тауып көрейік (2 – сурет). Мысалы l' үшін:

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$y = 3.$$

Сонда, $x^2 = -8$ болып, шешімі $x_{1,2} = \pm\sqrt{8}\ \ i$ болады .



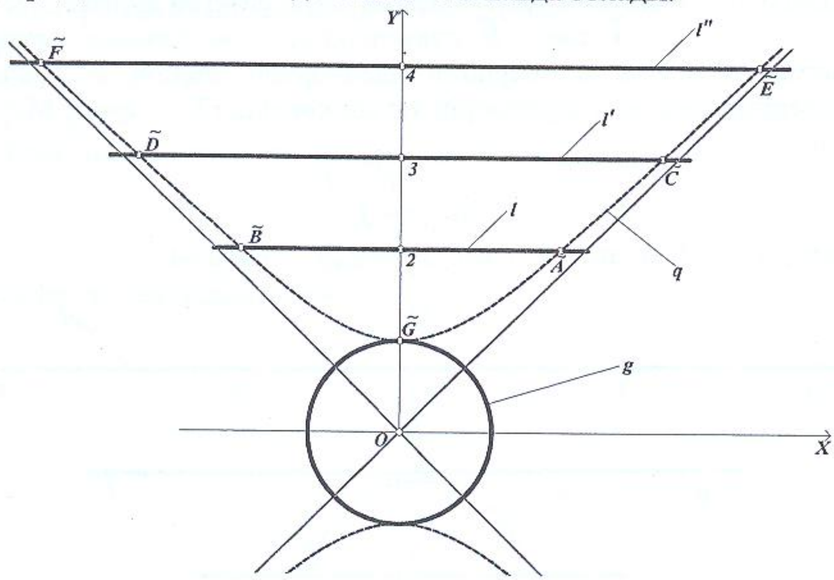
2 сурет – Бірнеше параллель түзулердің шеңбермен жорымал нүктелерде қиылысуы

Демек $\tilde{C}\,(\sqrt{8}\ i;\ 3)$, $\tilde{D}\,(-\sqrt{8}\ i;\ 3)$.

Дәл осылай l'' түзуінің де қиылысу нүктелерін табамыз. Олар: $\tilde{E}\,(\sqrt{15}\ i;\ 4)$, $\tilde{F}\,(-\sqrt{15}\ i;\ 4)$.

Осыдан байқайтынымыз: егер түзулерді l түзуінен жоғары емес, төменнен ала бастасақ, онда міндетті түрде бір түзу берілген шеңбермен жанасып, $\tilde{G}\,(\,0;\ 1\,)$ нүктесін берер еді.

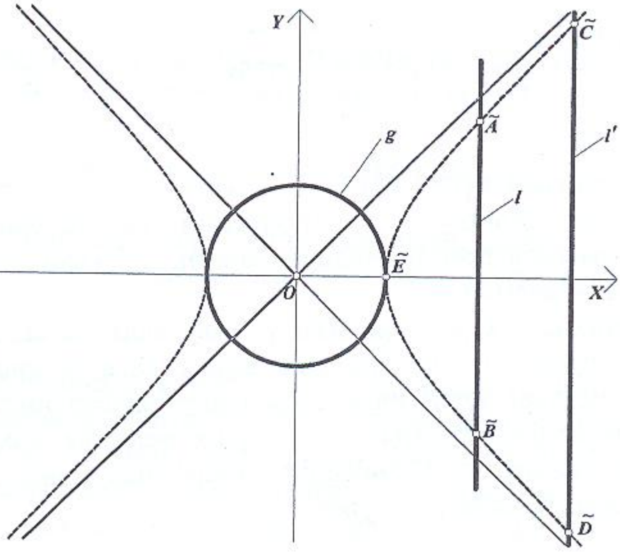
Табылған $\tilde{E},\ \tilde{C},\ \tilde{A},\ \tilde{G},\ \tilde{B},\ \tilde{D},\ \tilde{F}$ нүктелерді қосып шыққанда гиперболаның бір тармағын көруге болады (3 – сурет). Бұл мысалда x осі – симметрия осі, сондықтан q гиперболасының екінші тармағы шеңбердің төменгі жағында өзінен - өзі пайда болады.



3 сурет – Шеңбер мен параллель түзулердің жорымал нүктелерде қиылысуынан пайда болатын гипербола

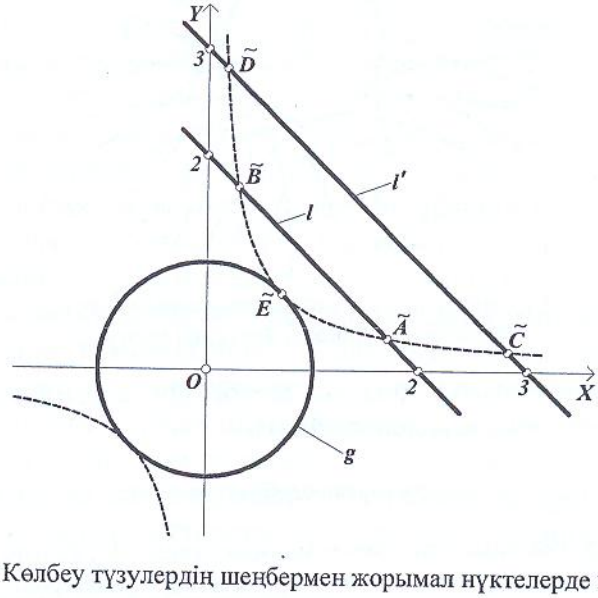
Дәл осындай жолмен, енді шеңбердің вертикаль параллель түзулермен қиылысуын қарастырайық. Бұл жерде: g: $x^2+y^2=1$, l: $x = 2$, l': $x = 3$.

Параметрлерінің сандық мәндері жоғарыда қарастырылған мысалдағыдай болып, тек абсцисса мен ордината орындарын ауыстырғандықтан, l түзуі $\tilde{A}$ және $\tilde{B}$ ал l' түзуі $\tilde{C}$ және $\tilde{D}$ жорымал нүктелерін, ал жанасу түзуі $\tilde{E}$ нүктесін береді (4 – сурет). Шыққан нүктелер де гипербола қисығын анықтайды.



4 сурет – Шеңбердің вертикаль параллель түзулермен қиылысуы

Енді шеңбердің көлбеу орналасқан параллель түзулермен жорымал нүктелерде қалай қиылысатынын қарастыралық (5 – сурет).



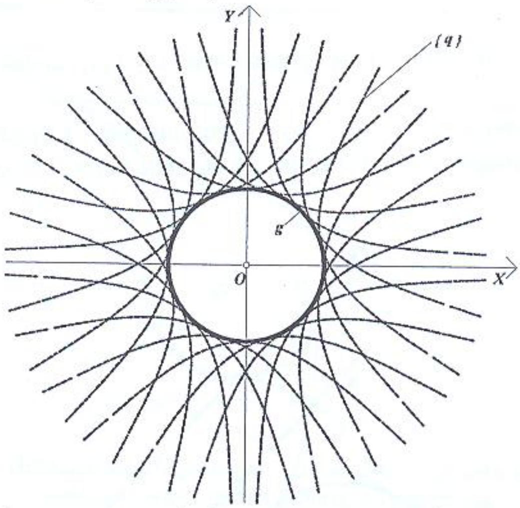
5 сурет – Көлбеу түзулердің шеңбермен жорымал нүктелерде қиылысуы

Бұл жерде

$$g: \quad x^2 + y^2 = 1, \quad \text{және} \quad g: \quad x^2 + y^2 = 1,$$
$$l: \quad x + y = 2 \qquad\qquad l: \quad x + y = 3$$

Теңдеулер жүйелерін шеше отырып, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ және $\tilde{D}$ нүктелерін анықтаймыз. Жанасу $\tilde{G}$ нүктесінің де координаталары жеке анықталады. Табылған нүктелерді қосып, осі ғана өзгерген бұрынғы гиперболаны аламыз.

Сонымен, қарастырылған үш мысалда да шеңбер түзулермен жорымал нүктелерде қиылысып отырды. Оларды қисықпен қосқанда әр жолы осьтері түрлі бағыттағы гиперболалар шығатынын көрдік. Гиперболалардың бағытын i бірлік векторы анықтады. Осыдан шығатын тұжырым: Шеңбердің төңірегінде саны ∞^1 – ге тең гиперболалар болады (6 – сурет).



6 сурет – g шеңбері және оның саны ∞^1- ге тең гипербола түріндегі жорымал жалғасы

Бұл гиперболалар жиынын шеңбердің жорымал толықтауышы немесе жорымал жалғасы деп атаймыз.

Қолданылған әдебиеттер тізімі:

1. Балк М.Б. и др. Реальные применение мнимых чисел. – К.: Рад. шк., 1988. – 255 с.
2. Яглом И. М. Комплексные числа и их применения в геометрии. – М.: Физматгиз, 1963. – 192 с.