УНИВЕРСАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ КОНИКИ

Жанузак Мухитулы ЕСМУХАН

Доктор технических наук, профессор
Казахского национального технического университета имени К.И.Сатпаева

Кайырбек Амиргазыулы КУСПЕКОВ

Кандидат технических наук, доцент
Казахского национального технического университета имени К.И.Сатпаева

Кривые второго порядка можно получить в результате сечения конуса второго порядка плоскостью. Поэтому их называют коническими сечениями, сокращенно коникой. Уравнение коники в декартовой системе координат имеет следующий вид:

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + a_4x + a_5y + a_6 = 0, \tag{1}$$

где: x, y – текущие координаты точки, принадлежащей конике;
$a_1, a_2 ..., a_6$ - коэффициенты, подлежащие к определению.

По крайней мере один из этих коэффициентов не равен нулю. Пусть $a_1 \neq 0$.

Тогда вводив новое обозначение $\frac{a_i}{a_1} = b_{i-1}$, можно переписать (1) в виде (2):

$$x^2 + b_1y^2 + b_2xy + b_3x + b_4y + b_5 = 0. \tag{2}$$

Для определения коэффициентов $b_1, b_2, ..., b_5$ надо иметь пять условий. Это означает, что число коник на плоскости равно ∞^5, т.е. коника является пятипараметрическим множеством точек. Отсюда следует, что конику можно задать одним из следующих способов:

1) пятью точками, принадлежащими кривой второго порядка;
2) четырьмя точками и одной касательной;
3) тремя точками и двумя касательными;
4) пятью касательными;
5) четырьмя касательными и одной точкой;
6) тремя касательными и двумя точками.

Точки можно задать координатами, а касательные уравнениями. Однако мы будем считать, что точки фиксированы касательные проведены на плоскости.

Для построения изображения коники удобно исходить из обратной теоремы Паскаля. Поэтому рассмотрим теорему Паскаля: *противоположные стороны шестиугольника, вписанного в конику, пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой.*

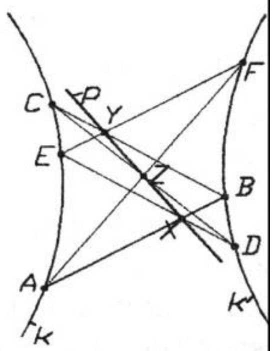

Рисунок 1

Шестиугольник считается вписанным в конику, если все его вершины принадлежат конике. На рис. 1 показаны коника (гипербола) k и вписанный в нее шестиугольник $ABCDEF$. Противоположными считаются такие две стороны, которые отделены друг от друга двумя сторонами, пр обходе шестиугольника как в одном (прямом), так в другом (обратном направлениях. Противоположные стороны рассматриваемог шестиугольника: (AB) и (DE); (BC)и (EF); (CD) и (FA). Точк пересечения X, Y и Z, согласно теореме Паскаля, лежат на одно прямой p.

$$(AB)\cap(DE)=X\,;(BC)\cap(EF)=Y\,;(CD)\cap(FA)=Z\,.$$

Прямую p называют прямой Паскаля.

Обратная **теорема** Паскаля: *если противоположные сторон шестиугольника пересекаются в трех точках, лежащих на одно прямой, то его вершины принадлежат одной и той же конике.*

1. Коника задана пятью точками. Задание коники пятью точками считается основным, так как другие способы задания приводятся к этому основному способу. Пять точек, определяющих конику должны занимать общее положение, т.е. ни какие три из них не должны принадлежать одной прямой. Пусть коника определена точками *A, B, C, D* и *E* (рис. 2). Покажем алгоритм построения еще одной точки *A*, принадлежащей этой конике. Проводим стороны *AB*, *BC*, *CD* и *DE*. Задача сводится к определению шестой вершины *F* вписанного в конику шестиугольника *ABDCEF*.

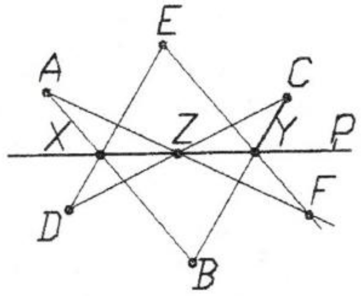

Рисунок 2

Противоположные стороны *AB* и *DE* пересекаются в точке *X*. Через точку *X* проводим произвольную прямую *p*, которую принимаем за прямую Паскаля.

Прямая *p* пересекает сторону *BC* в точке *Y* и сторону *CD* – в точке *Z*.

Согласно теореме Паскаля сторона *EF* проходит через точку *Y*, а сторона *AF* – через точку *Z*. Точка пересечения *F* прямых *EY* и *AZ* является искомой шестой вершиной вписанного в конику шестиугольника *ABDCEF*. $(AZ)\cap(EY)=F$. Меняя положение прямой Паскаля, получаем новую точку кривой второго порядка, определенного заданными точками *A, B, C, D* и *E*. Когда прямая *p*, вращаясь вокруг точки *X*, сделает один полный оборот, то соответствующая ей точка *F* опишет искомую конику.

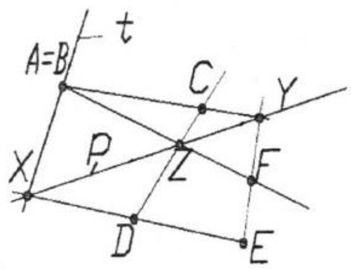

Рисунок 3

2. Коника задана четырьмя точками и одной касательной. В этом случае точку, принадлежащую касательной, следует считать двойной точкой. Тогда касательная играет роль одной из сторон шестиугольника и задача сводится к предыдущей. Пусть заданы четыре точки *A, C, D* и *E* и касательная *t*, проходящая через точку *A (рис3)*.

Точку A считаем двойной точкой, т.е. она совпадает с точкой B
Тогда вместо стороны AB можно принимать касательную t. Проведе
стороны BC, CD и DE шестиугольника, вписанного в конику. Тогд
противоположные стороны $t(AB)$ и DE пересекаются в точке X
Проводим прямую Паскаля $p(\ni X)$, которая пересекает стороны BC
CD в точках Y и Z соответственно. Прямые EY и AZ пересекаются
точке F, которая согласно обратной теореме Паскаля принадлежи
конике, определяемой заданными точками A, C, D, E и касательной t
При вращении прямой p вокруг точки X соответствующая ей точка F
опишет кривую второго порядка.

3. Коника задана тремя точками и двумя касательными
Рассмотрим построение какой-нибудь точки F коники, заданно
точками A, C, D и касательными t_1, t_2 ($A\in t_1$ и $D\in t_2$). Тогда точка A и D будут двойными, а именно $A=B$ и $D=E$. Касательная t_1 выполняет роль стороны AB, а касательная t_2 - стороны DE, вписанного в конику шестиугольника $ABDCEF$ (рис 4). Противоположные стороны AB и DE, т.е. касательные t_1 и t_2, пересекаются в точке X. Через точку X проводим произвольную прямую p (прямая Паскаля).

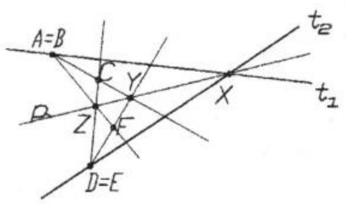

Рисунок 4

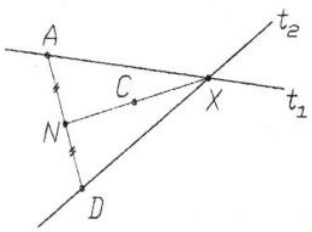

Рисунок 5

Эта прямая p пересекает прямую BC в точке Y, а прямую CD – точке Z. Тогда $(AZ)\cap(EY)=F$ - точка, принадлежащая искомой конике.

На практике точку C определяют исходя из так называемого инженерного дискриминанта f. Пуст
имеются две точки A и D, принадлежащие конике, и две касательные t_1
и t_2, проведенные в этих точках (рис. 5). Проводим отрезок AD
находим его середину $N(|AN|=|ND|)$. Считают, что точка C
принадлежит отрезку NX. Инженерным дискриминантом называетс
отношение отрезка NC к отрезку NX:

$$f=\frac{|NC|}{|NX|}. \qquad (3)$$

Определим значения инженерного дискриминанта. Пусть точка C совпадает с точкой N. Тогда $f=\frac{|NN|}{|NX|}=0.$ В этом случае коника вырождается в двойную прямую AD. Когда точка C совпадает с точкой X, тогда $f=\frac{|NX|}{|NX|}=1$ и коника распадается на две пересекающиеся прямые AX и DX. Таким образом значения инженерного дискриминанта обозначают сегмент: $0 \le f \le 1$. Установлено, что для параболы точка C является серединой отрезка NX, т.е. f=0,5. Для эллипса f≤0,5, а для гиперболы f>0,5.

4. Коника задана пятью касательными. В начале приведем теорему, двойственную теореме Паскаля. Речь идет о теореме Брианшона: *во всяком шестиугольнике, описанном вокруг коники, три прямые соединяющие пары противоположных вершин, проходят через одну точку (точку Брианшона).*

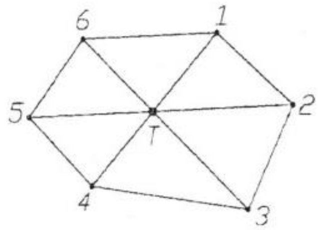

Рисунок 6

Пусть *123456* – описанный вокруг коники шестиугольник (рис. 6).

Противоположные вершины: *1* и *4*; *2* и *5*; *3* и *6*. Согласно теореме Брианшона $(14)\cap(25)\cap(36)=T$, где T – точка Брианшона. Теорема Брианшона подобно теореме Паскаля, приложима к шестиугольнику, выродившемуся в пяти-, четырех- или треугольник.

Рассмотрим конику, заданную касательными t_1, t_2, t_5 (рис.7). Точки пересечения касательных образуют пятиугольник *12345*. Будем считать одну из касательных, например прямую t_1, как двойную ($t_1 = t_6$), т.е. как совпавшие две стороны.

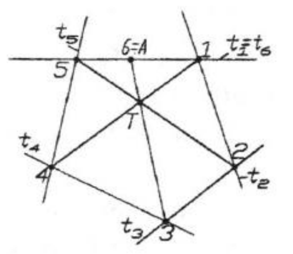

Рисунок 7

Тогда вершина *6* инцидентна касательной t_1 и является точкой касания. Если эту точку обозначим буквой A, то она принадлежит заданной конике. Применяя теорему Брианшона, находим точку пересечения прямых, соединяющих противоположные вершины $(14)\cap(25)=T$. Тогда прямая, соединяющая противоположные вершины *3* и *6*, проходит через точку T.

$(3T)\cap t_1 = 6 = A$. Теперь будем считать, что $t_2 = t_6$. Тогда можно найти точку B касания $(B\in t_1)$, как шестую вершину шестиугольника, описанного вокруг коники. Противоположной вершине *1* будет вершина *3*, а вершине *2* – вершина *5*. Определим точку Брианшона: $T=(13)\cap(25)$. Прямая, проведенная через точки 4 и T, пересекает прямую t_2 в точке B. Применяя аналогичные построения, находим точки C$\in t_3$, D$\in t_4$, E$\in t_5$, которые принадлежат искомой конике. Алгоритм построения коники, заданной пятью точками, был изложен выше (рис. 2).

5. Коника задана четырьмя касательными и одной точкой. В этом случае две из данных касательных следует считать двойными. Предположим, что данные прямые t_1, t_2, t_3 и t_4 являются касательными и точка $A(\in t_1)$ инцидентна конике (рис.8). Если будем считать, что прямые t_1 и t_3 двойными касательными ($t_1 = t_5$ и $t_3 = t_6$), то получим пятиугольник *A 1234*. Шестая вершина B описанного вокруг коники шестиугольника инцидентна касательной t_3. Пара прямых 13 и 24, соединяющих противоположные вершины шестиугольника, определяют точку Брианшона: $T=(13)\cap(24)$. Прямая, соединяющая третью пару противоположных вершин *A* и *B*, проходит через точку *T*. $(AT)\cap t_1 = B$. Найденная точка B принадлежит конике, как точка ее прикосновения касательной t_3. Теперь принимаем, что двойными являются касательные t_1 и t_2. Противоположными вершинами будут точки: *A* и *2*, *1* и *3*. Точка Брианшона занимает новое положение: $T_1=(A2)\cap(13)$. Прямая, соединяющая точки T_1 и *4*, пересекает касательную в точке *C*. Теперь коника определена тремя точками *A*, *B* и *C* и двумя касательными t_1 и t_2 (или t_3). Этот случай был рассмотрен выше (рис. 4).

Рисунок 8

6. Коника задана тремя касательными и двумя точками. В этом случае все три касательные следует считать двойными. Пусть коника задана касательными t_1, t_2, t_3 и точками $A(\in t_1)$, $B(\in t_2)$, (рис.9). Точки

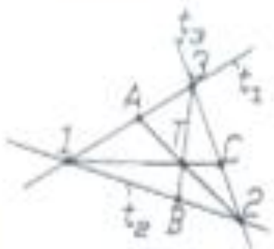

Рисунок 9

пересечения касательных и заданные две точки образуют пятиугольник *1A32B*, а шестая вершина *C* описанного вокруг коники шестиугольника инцидентна касательной t_3. Соединив противоположные вершины точку *A* с точкой *2* и точку *B* с точкой *3*, находим точку Брианшона: $T=(2A)\cap(3B)$. Прямая, соединяющая точки *T* и *1*, пересекает прямую t_3 в точке *C*. Построение произвольной точки *F* коники, определяемой трем точками *A, B, C* и двумя касательными t_1 и t_2, показано на рис. *4*. На основании рис. *9* можно утверждать, что прямые, соединяющие вершины треугольника, описанного вокруг коники, с точками касания противоположных им сторон, пересекаются в одной точке.

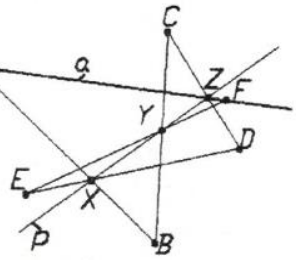

Рисунок 10

Теорема Паскаля частные ее случаи находят многочисленные применения при решении геометрических задач. Ниже приведены два примера.

Пример 1. Построить точку пересечения прямой $a(\in A)$ и коники, заданной пятью точками A, B, C, D и E (рис10).

Решение. Обозначим искомую точку через *F*. Будем считать, что шестиугольник *ABCDEF* вписан в конику. Противоположные стороны *AB* и *DE* пересекаются в точке *X*, а противоположные стороны *CD* и *FA* (сторона *FA* принадлежит прямой *a*) - в точке *Z*.

Прямая Паскаля *p* определена точками *X* и *Z*, которая пересекает сторону *BC* в точке *Y*. Прямая, определяемая точками *E* и *Y*, пересекает прямую *AZ* в искомой точке *F*. Точка *F* является точкой пересечения прямой *a* и коники, определяемой пятью точками *A, B, C, D* и *E*.

Пример 2. Пятью точками *A, B, D, E* и *F* определена коника. Провести касательную *t* к конике *k*, проходящей через точку *B* (рис. *11*).

Решение. Точку *B* будем считать двойной, т.е. она совпадает с точкой *C*. Рассмотрим шестиугольник *A B C D E F*, вписанный в конику *k*. Противоположные стороны *AB* и *DE* пересекаются в точке *X*, а противоположные стороны *CD* и *AF* – в

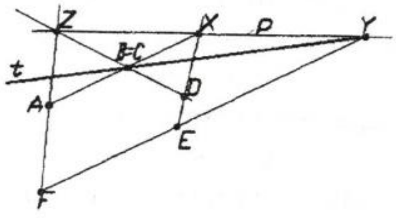

Рисунок 11

точке Z. Точки X и Y определяют прямую Паскаля p. Искома касательная t будет противоположной стороне EF и пересекаются точке Y, принадлежащей прямой p. Искомая касательная t проводитс через точки B и Y.

Список использованной литературы:

1. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. – М.: ГЛАВИЗДАТ, 1953. – 528 с.
2. Четверухин Н.Ф. Проективная геометрия. – М.: Просвещение, 1969. – 368 с.

ПРОБЛЕМЫ ФОРМИРОВАНИИЯ СИСТЕМЫ ГЕОМЕТРО – ГРАФИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН В УСЛОВИЯХ РАЗВИТИЯ КРЕДИТНОЙ ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ

Жаксылык ДЖАНАБАЕВ

Доктор педагогических наук, профессор
Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова

Дарига АБИЛДАБЕКОВА

Старший преподаватель
Казахского национального университета им. К.И. Сатпаева

Сегодня все актуальней становится подготовка конкурентоспособных кадров на уровне международных требований, предъявляемых современным специалистам. Достижению этих целей направлена Государственная программа развития образования в РК на 2005-2010 годы и новый Закон РК «Об образовании». Согласно новому Закону система образования предусматривает ближайшей перспективе реализацию не только новых образовательных программ всех уровней, но и специальных, специализированных учебных программ изменяя парадигмы образования «образования на протяжении всей жизни».

По новому Закону серьезные изменения претерпевают существующая структура содержание технического и профессионального образования. В этих условиях подготовка квалифицированных кадров технического и обслуживающего труда