ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИВЫХ НА ОСНОВЕ БИКВАДРАТИЧНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Баймахан Нурмаханович НУРМАХАНОВ

Доктор технических наук, профессор
Казахского национального технического университета имени
К.И.Сатпаева

Гульмира Кусаиновна КУБЕНТАЕВА

Старший преподаватель Восточно-Казахстанского государственного
технического университета имени Д. Серикбаева

В статье рассматривается способ формообразования кривых с использованием графической модели биквадратичного преобразования, порождаемого отображением однополостного гиперболоида и конуса, обозначаемого в дальнейшем символом $Г_4$, где прообразом задается окружность. Для получения кривых различной формы соответственно будет изменяться расположение прообраза-окружности на плоскости. Графическая модель биквадратичного преобразования $Г_4$ приведена на рисунке .

Биквадратичное преобразова-ние плоскости является взаимно (4-4)-значным соответствием между точками двух совмещенных плоскостей H_1 и H'_1 $(H_1 \equiv H'_1)$.

Другими словами каждой точке плоскости $П_1$ соответствуют четыре точки на плоскости $П'_1$. И наоборот каждой точке плоскости $П'_1$ соответствуют четыре точки $П_1$.

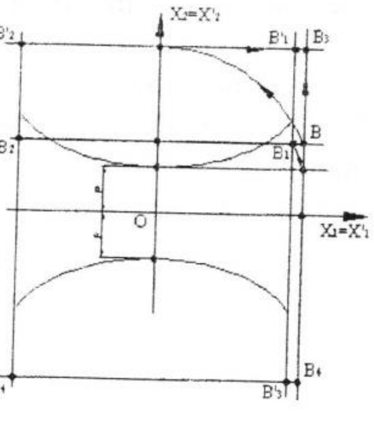

Рисунок 1 - Графическая модель биквадратичного преобразования $Г_4$

Биквадратичное преобразование $Г_4$, порождаемое отображением однополостного гиперболоида и конуса, нами получено следующим образом:

1. В пространстве задаются две

пересекающиеся поверхности второго порядка, а также задаются плоскости проекций общего положения H_1 и H'_1 ($H_1 \equiv H'_1$).

2. Проводим проецирующий луч m, который пересекает заданн поверхности Q^0_1 и Q^0_2 соответственно в точках B^o1, B^o2, B^o3 и B^o4, а плоскость H – в точке B (рис.2).

3. Поверхность второго порядка Q^0_1 вращаем вокруг оси ординаты (OX_2) на 90° так, чтобы положительное направление оси абсциссы совпало с отрицательным направлением оси аппликаты. В результате чего, получается новая поверхность $Q^{o\prime}_1$ и точки $B^{o\prime}_1$ и $B^{o\prime}_2$, которые соответствуют точкам B^o_1 и B^o_2. При проецировании точек $B^{o\prime}_1$ и $B^{o\prime}_2$ на плоскость H′ получаются точки B_1 и B_2 (рис.3).

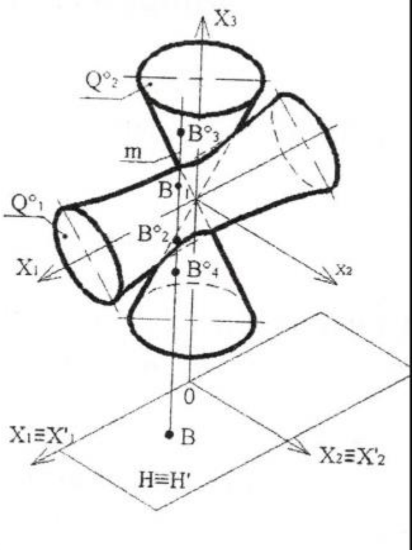

Рисунок 2 – Схема расположения поверхностей в пространстве

4. Поверхность Q^o_2 вращается вокруг оси абсциссы (OX_1) на 90°, при этом положительное направление оси аппликаты совпадет положительным направлением оси ординаты. При вращени поверхность Q^o_2 образует новое положение $Q^{o\prime}_2$. Точки B^o_3 и B^o расположенные на поверхности конуса Q^o_2, при его вращени занимают новое положение - $B^{o\prime}_3$ и $B^{o\prime}_4$, при проецировании которы на плоскость H' получаются точки B_3 и B_4 (рис.4).

5. Проводим через полученные точки B_1 и B_2 линии, параллельны оси OX_2, а через точки B_3 и B_4 - линии параллельные оси OX_1. На пересечении этих линий образуются четыре точки: B'_1, B'_2, B'_3 и B'_4 которые соответствуют точке B (рис.5).

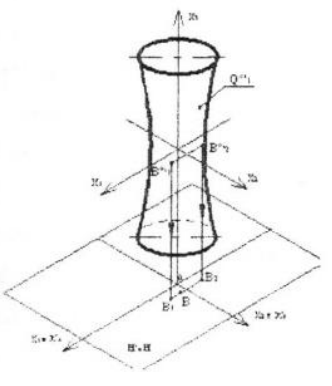

Рисунок 3 – Расположение однополостного гиперболоида $Q^{o\prime}_1$

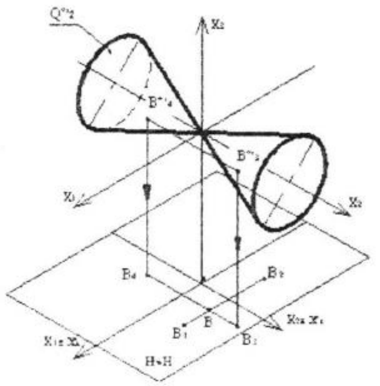

Рисунок 4 – Расположение конуса $Q^{o\prime}_2$

Таким образом, в результате последовательного выполнения выше изложенного конструктивного аппарата точке В плоскости H_1 соответствуют четыре точки B'_1, B'_2, B'_3 и B'_4 плоскости H'_1, то есть устанавливается (4-4)-значное соответствие между совмещенными плоскостями H_1 и H'_1.

Рассмотрим получение уравнения биквадратичного преобразования плоскости $Г_4$, для чего используются уравнения поверхностей второго порядка: однополостного гиперболоида Q^0_1 и конуса Q^0_2:

$$X_1^2 = X_2^2 + X_3^2 - R^2 \tag{1}$$

$$X_3^2 = X_2^2 + X_1^2 \tag{2}$$

После преобразования получаем искомое уравнение биквадратичного преобразования $Г_4$:

$$\left.\begin{aligned} X_1' &= \sqrt{X_1^2 - X_2^2 + R^2} \\ X_2' &= \sqrt{X_2^2 + X_1^2} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где X_1, X_2- координаты точек-образов;

X'_1, X'_2- координаты точек-прообразов;

R – коэффициент преобразования.

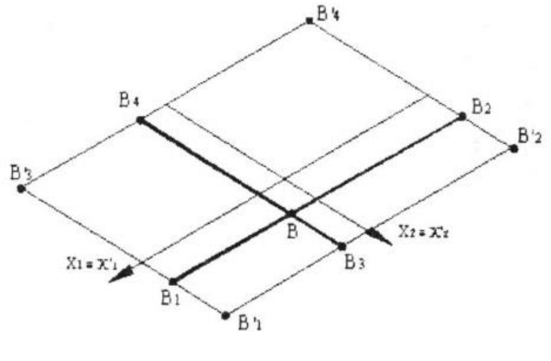

Рисунок 5 – Построение точек B'_1, B'_2, B'_3 и B'_4
по известным точкам B_1, B_2, B_3 и B_4

В результате необходимых изменений из данной систем уравнения (3), определяется уравнение обратного биквадратичног преобразования, обозначаемое символом $Г'_4$:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \sqrt{\frac{X'_1 + X'_2 - R^2}{2}} \\ X_2 &= \sqrt{\frac{X'_2 - X'_1 + R^2}{2}} \end{aligned}\right\} \quad (4$$

Для получения кривых прообраз-окружность (р) подвергаем биквадратичному преобразованию $Г_4$. Каждая точка-прообра преобразуется в четыре точки-образы. Последовательно соединя полученные точки-образы, построим кривую и обозначим её символом р'. Прообраз преобразуется в общем случае в кривую 4-го порядка. На рисунке 6 показано преобразование точки-прообраза *1* окружности (p) в четыре точки-образы $1'_1$, $1'_2$, $1'_3$ и $1'_4$ с использованием графической модели биквадратичного преобразования $Г_4$. Где прообраз-окружность задается радиусом $r = 15$ мм. (размер берется произвольно). Центр прообраза - окружности находится на оси OX_2 и на расстоянии равное t относительно начало координат, где $t > R$. На графической модели указываем область существования биквадратичного преобразования для более точного построения образа.

Обозначим точки на прообразе-окружности цифрами *1, 2, 3* и т.д. Заданную точку-прообраз *1* подвергнем биквадратичному преобразованию $Г_4$ и построим точки 1_1, 1_2, 1_3, 1_4. Через точки 1_1, 1_2 проводим вертикальные линии параллельные оси OX_2, а через точки 1_3 и 1_4 - горизонтальные линии параллельные оси OX_1. Таким образом, пересечение этих линий определяет образы точек $1'_1$, $1'_2$, $1'_3$ и $1'_4$ прообраза точки *1*. Следующие образы заданных точек находим согласно выше изложенному алгоритму. Затем, последовательно соединяя полученные точки-образы, строим кривую (p'). В результате прообраз-окружность (p) преобразуется в кривую 4-го порядка (p'), которая распадается на две кривые второго порядка (рис.6).

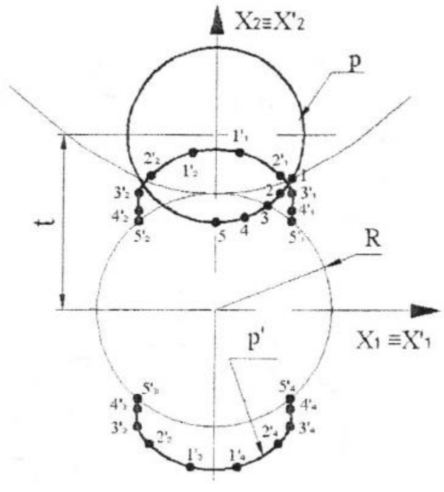

Рисунок 6 – Определение кривой с использованием биквадратичного преобразования $Г_4$

В связи с этим, большой, интерес представляет решение обратной задачи - определение полученной кривой математически.

Используя уравнение обратного биквадратичного преобразования $Г'_4$ (4), определим уравнение для данной кривой:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \sqrt{\frac{X_1'^2 + X_2'^2 - R^2}{2}} \\ X_2 &= \sqrt{\frac{X_2'^2 - X_1'^2 + R^2}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где X_1, X_2 – координаты точек - образов,

X'_1, X'_2 – координаты точек - прообразов,

R –коэффициент преобразования.

Значения X_1 и X_2 подставляются в уравнение прообраза - окружности:

$$(X_1 - a)^2 + (X_2 - b)^2 = r^2 \tag{6}$$

где *a, b*- координаты центра окружности-прообраза;

r – радиус прообраза-окружности

Определяем уравнение кривой (рис. 6):

$$\left(\sqrt{\frac{X_1'^2+X_2'^2-R^2}{2}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{X_2'^2-X_1'^2+R^2}{2}}-b\right)^2=r^2$$

Таким образом, показана возможность использовани биквадратичного преобразования Γ_4 в моделировании кривы четвертого (рис. 6, 7) и восьмого порядка (рис. 8). Это да возможность широкого их применения, как в начертательно геометрии, так и в технике.

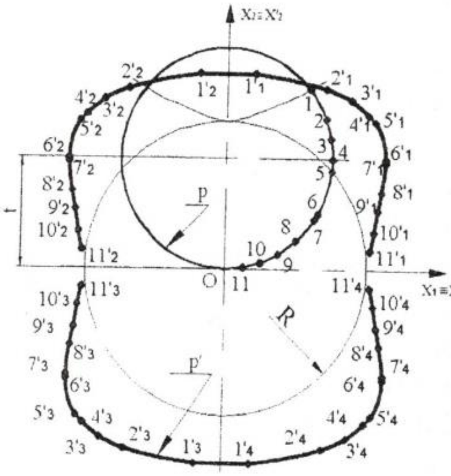

Рисунок 7 – Определение кривой с использованием биквадратичного преобразования Г4

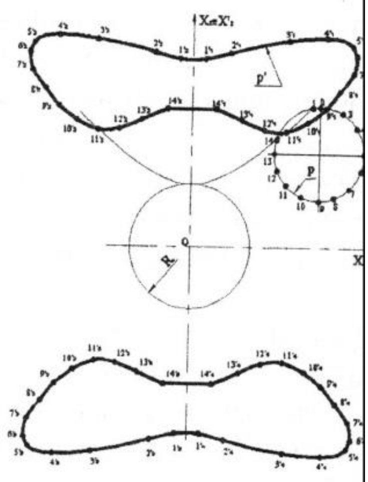

Рисунок 8 – Определение кри использованием биквадратичного преобразова

Список использованной литературы:

1. Фролов А.С. Методы преобразования ортогональных проекций. -М.: Машиностроение, 1970, 160 с.
2. Нурмаханов Б.Н., Кубентаева Г.К. Моделирование одного вида биквадратичного преобразования и исследование его свойств. // Поиск //Научный журнал Министерства образования и науки РК, Алматы, №1, 2008 – с. 214-218.
3. Байдабеков А.К. Теория нелинейного преобразования и их применение в науке и технике. -Автореф. … дисс. докт. техн. наук. Алматы, 2006.