ПОСТРОЕНИЕ КРИВЫХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ НЕЛИНЕЙНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ ПРОСТРАНСТВА

Жаксылык Жумадилович ДЖАНАБАЕВ

Доктор педагогических наук, профессор
Южно-Казахстанского государственного университета им. М. Ауезова

Ауез Кенесбекович БАЙДАБЕКОВ

Доктор технических наук, профессор
Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева

Нурлан Сагинбекович УМБЕТОВ

Кандидат технических наук, доцент
Южно-Казахстанского государственного университета им. М. Ауезова

Уалихан Кажиакбарович КУСЕБАЕВ

Кандидат технических наук, доцент
Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева

Преобразования пространства, расслаивающейся в пучке плоскостей на центральные кремоновые преобразования с центром в свободной точке пересечения пучка с фокальной кривой конгруэнции, примечательны тем, что состоят из совокупности преобразований плоскостей. Поэтому построение соответственных точек преобразования можно осуществлять графически и аналитически – [1].

Пусть в евклидовом пространстве E_3, дополненном несобственной плоскостью, даны квадрика δ^2, пучок плоскостей $\boldsymbol{l}(\alpha)$ с несобственной прямой – осью l_∞ и две пространственные алгебраические кривые a^u, f^v порядков u, v, имеющих с прямой l

соответственно *u-1, v-1* фиксированных точек A_q, F_g. Плоскость α_i пучка l_∞ (α) пересекает квадрику δ^2 по окружности d^2, а кривые a^u, f^v каждую в одной свободной точке, соответственно A, F (остальные *u-1, v-1* точек A_q, F_g фиксированы на l_∞).

При проецировании этой конструкции на одну из плоскостей пучка (l_∞) получаем множество окружностей – проекции сечений квадрики плоскостями уровня, проекции кривых a^u, f^v содержат множество точек $A_1 \in a_1^u$,, $F_1 \in f_1^v$.

В каждой секущей плоскости α_i рассматриваем преобразование Гирста, задаваемое инвариантной коникой d^2 и парой совпавших ассоциированных F точек, $F^3 \equiv F^{3'}$ (рисунок 1). Точке A ставится в соответствие точка A' пересечения прямой AF с полярой $\bar{a}$ точки A относительно d^2.

Таким образом, на плоскости проекции множеству точек A, составляющих кривую a_1^u взаимно однозначно соответствует множество точек A_1', образующих кривую $a_1^{u'}$. Иначе говоря, кривой a^u ставится в соответствие кривая $a^{u'}$.

Если в качестве квадрики выбран прямой круговой конус, а направление проецирования совпадает с его образующей, то на плоскости проекции получается пучок параболических окружностей (рисунок 1).

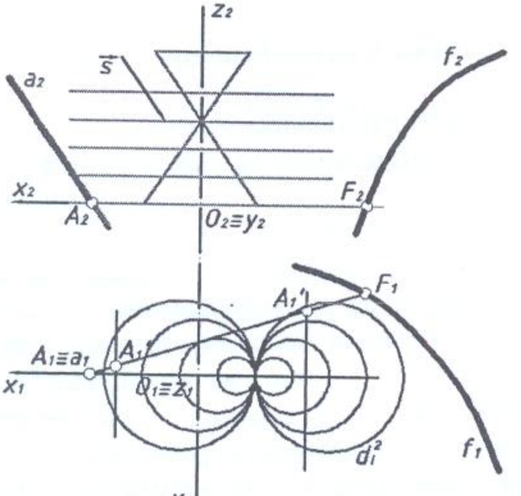

Рисунок 1

I. Если траектория перемещения центров преобразования прямая f^1, то образом точки относительно пучка параболических окружностей является кривая второго порядка (рисунок 2).

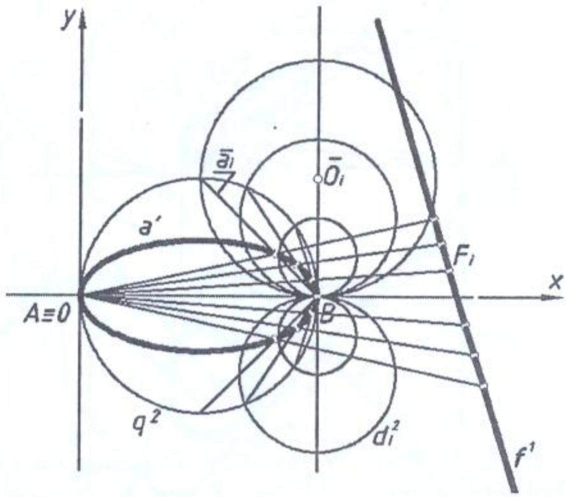

Рисунок 2

Действительно, прямые AF_i и поляры $\bar{a}$ точки (A) относительно окружностей d_i^2 образуют пучок прямых 1-го порядка. Каждой прямой пучка A соответствует одна прямая пучка (B) и обратно, каждой прямой пучка (B) соответствует одна прямая пучка (A). Следовательно, соответствие между прямыми пучков (A) и (B) [1, 1] – значное. Порядок алгебраической кривой, как результат пересечения соответственных прямых двух пучков равен

$$1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$$

II. Если траектория перемещения центров преобразования кривая 2-го порядка f^2, то образом точки относительно пучка эксцентрических окружностей является кривая 4-го порядка (рисунок 3).

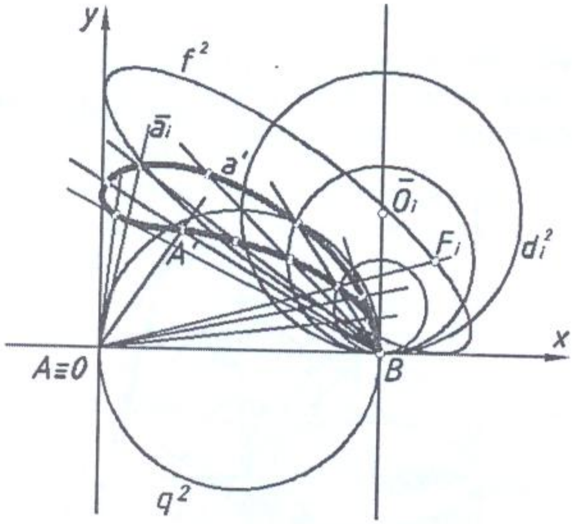

Рисунок 3

Действительно, пучок (B) прямых 1-го порядка пересекается с пучком (A) прямых 2-го порядка. Каждой прямой $\bar{a}$ пучка (B) соответствуют две прямые AF_i пучка (A) и обратно, каждой прямой пучка (A) соответствует одна прямая пучка (B).

Следовательно, между прямыми пучков (B) и (A) установлено [1, 2] – значное соответствие. Порядок алгебраической кривой равен

$$1 \times 2 + 2 \times 1 = 4$$

III. Если траектория перемещения центров преобразования кривая 3-го порядка f^3, то образом точки относительно пучка параболических окружностей является кривая 6-го порядка (рисунок 4).

Действительно, пучок (B) прямых 1-го порядка пересекается с пучком (A) прямых 3-го порядка. Каждой прямой $\bar{a}$ пучка (B) соответствуют три прямые AF_i пучка (A) и обратно, каждой прямой пучка (A) соответствует одна прямая пучка (B). Следовательно, между прямыми пучков (B) и (A) установлено [1, 3] – значное соответствие. Порядок алгебраической кривой равен

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 6$$

Для случая III покажем вывод уравнение кривой a'.

Рассмотрим аппарат мгновенных преобразований Гирста при фиксированных положениях прообраза – точки $A(x_A,\ 0)$ и базисной точки $B\ (d,\ 0)$ пучка параболических окружностей d_i^2.

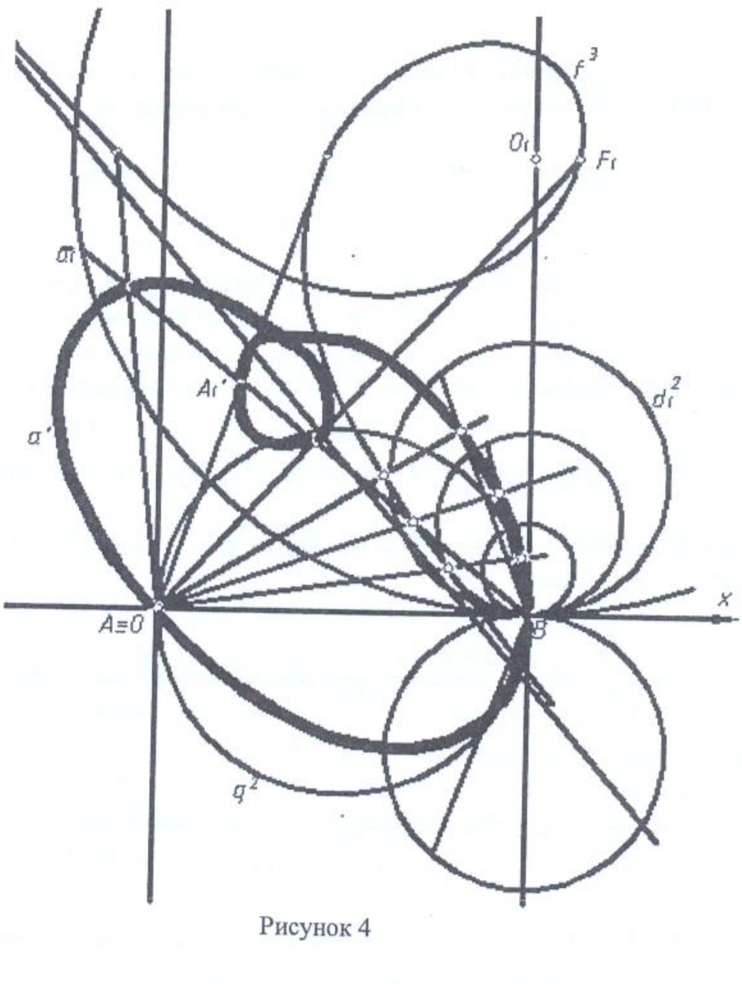

Рисунок 4

Уравнение конуса вращения можно записать в виде

$$\frac{(x-d)^2+y^2}{a^2}-\frac{(z-q)^2}{c^2}=0,$$

где d – расстояние по оси x.

Направление проецирования – вектор $\vec{s}$ составляет с плоскостью проекции угол

$$\varphi = arctg\frac{c}{a}. \qquad (1)$$

Ордината точки O (d, y_0) – центра окружности d_i^2 - сечения квадрики δ^2 плоскостью α_i определяется по формуле

$$y_0 = \frac{a}{c}z. \qquad (2)$$

Исходя из уравнения (1), определяем радиус окружности

$$R = \frac{a}{c}(z-q).$$

Подставляя в уравнение поляры $\bar{a}$ точки A относительно d^2 - [3]

$$xx_A + yy_A - x_0(x+x_A) - y_0(y+y_A) + x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} - R^2 = 0,$$

значения координат точек $A(x_A, 0)$, $O_i((d, y_0)$ и радиуса R, получаем уравнение пучка поляр $\bar{a}$

$$x = \frac{aczy + c^2dx_A + a^2(q^2 - 2zq) - d^2c^2}{c^2(x_A - d)}.$$

Отсюда

$$z = \frac{a^2q^2 + c^2[d(x+x_A) - xx_A - d^2]}{a(zqa - cy)}.$$

При $y_F = R_\xi$ где ξ = const, подставляя в (2) значение z, определяем

$$y_F = \frac{a(z-q)}{c\xi}. \qquad (3)$$

Из уравнения прямой AF - [2]

$$\frac{y - y_A}{y_F - y_A} = \frac{x - x_A}{x_F - x_A},$$

находим значение абсциссы точки F

$$x_F = \frac{a(z-q)}{cy\xi}(x - x_A) + x_A. \quad (4)$$

Уравнение кривой f^3 в общем виде выражается формулой

$$Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 3Ex^2 + 6Fxy + 3Gy^2 + Hx + Jy + K = 0. \quad (5)$$

Подставляя в уравнение кривой f^3 (5) значения координат x_F (4), y_F (3) точки F, получаем уравнение кривой a' - образа точки A (0, 0):

$$\begin{aligned} &Ka^3y^6 + y^5\xi^2(Ha^3x_A\xi + Jla) + 3y^4\xi a[Ea^2x_a^2\xi + Gl^2 + 2Fx_Al + \xi^2 Hl \cdot \\ &\cdot (x - x_A)] + ly^3[l^2D + 3alCx_A + 3aBx_a^2]\xi + 6y^3(x - x_A)al(Fl + Ex_A)\xi^2 + \\ &+ 3ly^3(x - x_A)(l^2 + Ax_A^2a + cl^2) + 3l^2y(x - x_A)^2(Aax_A + Bl) + Al^3(x - x_A)^3 = 0 \end{aligned},$$

где $l = c[x_Ax - d(x + x_A) + d^4]$; $c, \xi \neq 0$.

Установленные зависимости характеристик прообраза и образа кривых, полученных мгновенными преобразованиями Гирста с пучком параболических окружностей, дает возможность конструирования кривых с наперед заданными характеристиками, что имеет важное прикладное значение при моделировании технических кривых в инженерной практике.

Список использованной литературы:

1. Иванов Г.С. Конструирование технических поверхностей. – М.: Машиностроение, 1987. – 188 с.

2. Александров П.С. Курс лекции по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1979. – 572 с.

3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1966. – 831 с.