компьютерной графике, учитывающих современный уровень этой науки.

# ИННОВАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ СОВРЕМЕННОЙ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

**Владимир Яковлевич ВОЛКОВ**

Доктор технических наук, профессор
Омской государственной автомобильно-дорожной академии

В качестве инновационных технологий в работе предлагается курс современной начертательной геометрии значительно математизировать, формализовать и алгоритмизировать.

На наш взгляд, математизация предполагает введение с одной стороны формул расчета различных многообразий [1]:

Грассмановых многообразий

$$D_n^m = (m+1)(n-m);$$

обобщенных Грассмановых многообразий

$$\sum_{i=1}^{p} D_{n_i}^{m_i} = \sum_{i=1}^{p} (m_i+1)(n_i-m_i);$$

например, многообразие, состоящее из *2*-плоскостей четырехмерного пространства и 0-плоскостей, лежащих в *2*-плоскостях

$$\sum_{i=1}^{2} (D_4^2 + D_2^0) = (2+1)(4-2)+(0+1)(2-0)=8;$$

Шубертовых многообразий

$$Q_{об} = \sum_{i=0}^{m} a_i - \frac{1}{2} m(m+1),$$

которые можно представить в символьном виде

$$e^{m,m-1,..,1,0}_{a_{ma},a_{m-1},..,a_{1,}a_0} ;$$

криволинейных алгебраических многообразий

$$L^m_{n-1} = \frac{1}{n},\mathop{\Pi}_{1}^{i=n}(m+i)-1;$$

и, наконец, сочетание линейных и криволинейных многообразий

$$D^p_n + L^m_{n-1},$$

например, кривые второго порядка, которые лежат в 2-плоскости трехмерного пространства

$$D^2_3 + L^2_2 = (2+1)(3-2) + \frac{1}{2!}(2+1)(2+3) - 1 = 8 .$$

С другой стороны формул расчета геометрических условий: обобщенное условие инцидентности

$$Q_{об} = \frac{(2n-m)(m+1)}{2} - \sum_{i=0}^{m} a_i ;$$

условие k-параллельности

$$U_{\parallel} = km(n\text{-}m\text{-}p+km);$$

условие q-перпендикулярности

$$U_{\perp} = qm(p - m+qm).$$

Под формализацией мы будем понимать введение символьных расчетов, которые позволяют раскладывать произведения символов обобщенных условий инцидентности в сумму этих условий. Т.к. каждое из условий определяет некоторое многообразие, то можно с помощью символьных расчетов определять структурные характеристики пространств при их моделировании, многообразий при их конструировании, определять корректно ли сформулированы условия в задаче и определять число решений.

Полагаем, что такой подход позволяет развивать у студентов навыки инженерного решения технических задач.

Проиллюстрируем формализованный подход при доказательстве теоремы об общих прямых двух линейчатых конгруэнций.

Если представить линейчатую конгруэнцию в символьном виде

$$me_{3,0}^{1,0} + ne_{2,1}^{1,0},$$

где m – порядок конгруэнций, n – класс конгруэнций.

Примем, что $m_1e_{3,0}^{1,0} + n_1e_{2,1}^{1,0}$ - первая конгруэнция, а $m_2e_{3,0}^{1,0} + n_2e_{2,1}^{1,0}$ - вторая конгруэнция. Тогда произведение этих конгруэнций позволит определить число их общих прямых

$$\left(m_1e_{3,0}^{1,0} + n_1e_{2,1}^{1,0}\right)\left(m_2e_{3,0}^{1,0} + n_2e_{2,1}^{1,0}\right) = m_1m_2 + n_1n_2,$$

т.к. произведение $e_{3,0}^{1,0}e_{3,0}^{1,0} = e_{1,0}^{1,0}, e_{2,1}^{1,0}e_{2,1}^{1,0} = e_{1,0}^{1,0}$, а произведение несовместных условий $e_{3,0}^{1,0}e_{2,1}^{1,0} = 0$.

И, наконец, алгоритмизация курса начертательной геометрии позволяет решать геометрические задачи на моделях пространства различной размерности и структурных характеристик.

Рассмотрим конструирование гиперповерхности четырехмерного пространства с образующей – *1*-плоскостью. Сформулируем общий алгоритм конструирования многообразий:

1. Определяем размерность многообразия *1*-плоскостей четырехмерного пространства;
2. Выбираем геометрические условия:
 а) условия инцидентности, б) $k$ – параллельности и определяем их размерность;
3. По формальным признакам подбираем условия, которые могут определять конструируемые гиперповерхности;
4. Определяем структурные характеристики конструируемых гиперповерхностей;

5. Исследуем методы конструктивного построения образующих гиперповерхностей.

Итак:

1. Размерность многообразия 1-плоскостей четырехмерного пространства равна 6

$$D_4^1 = (1+1)(4-1) = 6$$

2. В символьном виде можно представить условие инцидентности и их размерность

$$e_{4,2}^{1,0} - 1; e_{4,1}^{1,0} - 2; e_{4,0}^{1,0} - 3; e_{3,2}^{1,0} - 2; e_{3,1}^{1,0} - 3; e_{3,0}^{1,0} - 4; e_{2,1}^{1,0} - 4; e_{2,0}^{1,0} - 5; e_{1,0}^{1,0} - 6$$

Условие *k*-параллельности *1*-плоскость: *1*-плоскость параллельна гиперплоскости $e_{4,2}^{1,0} - 1$; *1*-плоскость параллельна *2*-плоскости $e_{4,1}^{1,0} - 2$; *1*-плоскость параллельна *1*-плоскости $e_{4,0}^{1,0} - 3$.

3. Т.к. гиперповерхность содержит двупараметрическое многообразие *1*-плоскостей, то суммарная размерность условий должна быть равна 4.

Представим в символьном виде некоторые из конструируемых гиперповерхностей: $1.\left(e_{4,2}^{1,0}\right)^4; 2.\left(e_{4,2}^{1,0}\right)^2 e_{4,1}^{1,0}; 3.\left(e_{4,2}^{1,0}\right)^2 e_{3,2}^{1,0}; 4.\left(e_{4,2}^{1,0}\right)^2 e_{4,1}^{1,0}$; и. т. д.

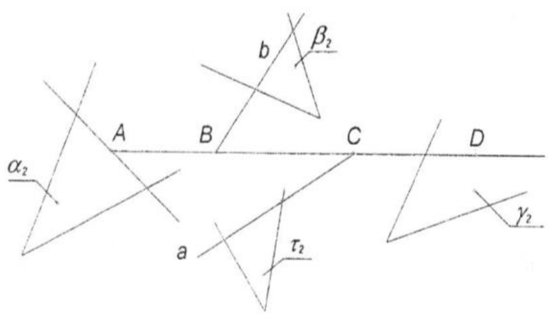
4. Определим структурные характеристики гиперповерхности, представленной в символьном виде один.

**Теорема.** Гиперповерхности четырехмерного пространства с образующей *1*-плоскостью и четверкой направляющих *2*-плоскостей, которые попарно пересекаются только в 0-плоскостях имеют порядок, равный трем, а класс – двум.

$$\left(e_{4,2}^{1,0}\right)^4 = 3e_{3,0}^{1,0} + 2e_{2,1}^{1,0}$$

Если умножить полученное представление гиперповерхности в символьном виде на $e_{4,1}^{1,0}$, то получим $3e_{1,0}^{1,0}$, а на $e_{3,2}^{1,0}$, то получим $2e_{1,0}^{1,0}$. Что является доказательством сформулированной теоремы.

Представим схематически конструктивное построение образующих гиперповерхности.




Схема

Если выбрать по произволу в $2$-плоскости $\alpha$ $0$-плоскость $A$, то последняя с $2$-плоскостью $\gamma$ будет определять гиперплоскость. Данная гиперплоскость с $2$-плоскостью $\beta$ пересекается по $1$-плоскости $b$, *а с* $2$-плоскостью $\tau$ пересекается по $1$-плоскости $a$. Тогда в этой гиперповерхности можно построить единственную $1$-плоскость, которая проходит через $0$-плоскость $A$ и пересекает $1$-плоскость $b$ в $0$-плоскости $B$, *а* $1$-плоскость а в $0$-плоскости $C$. Последняя будет пересекать $2$-плоскость $\gamma$ в $0$-плоскости $D$. Т.к. $0$-плоскостей в $2$-плоскости будет двупараметрическое множество, то получим двупараметрическое множество образующих с конструированной гиперповерхностью.

Список использованной литературы:

1. Волков В.Я., Юрков В.Ю. Многомерная исчислительная геометрия. – Омск: ОмГПУ, 2008. – 243 с.