2. http: // www.beginess.ru/articles/2007-10-18/bakalavr/4456.

3. Гильмиярова С. Многоуровневое высшее образование: американский опыт и российские перспективы. – Alma Mater: Вестник высшей школы, 2008. – №1. – С. 26-28.

4. Желтов В. Болонская декларация и российское образование. – Педагогика. – М., 2007. – №9. – 107-113 б.

КҮРДЕЛІ ПРОГРЕССИЯЛАР, ОЛАРДЫҢ ҚОСЫНДЫЛАРЫНЫҢ ФОРМУЛАЛАРЫ ЖӘНЕ ҚОЛДАНЫЛУЛАРЫ

Аманжол Нұғманұлы НҰРЛЫБАЕВ

Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университетінің профессоры, физика математикалық ғылымдарының кандидаты

Ләззат Есентайқызы БЕКЖИГИТОВА

Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университетінің

Мүшелері белгілі бір қатынастарды қанағаттандыратын реттелген тізбектер прогрессиялар (латынның progressio – алға қарай қозғалыс сөзінен шыққан [Boetius, 480-524]) деп аталады. Мысалы, тізбектің кез келген көршілес мүшелерінің айырмасы *0*-ге тең емес тұрақты сан: $d=a_{i+1}-a_i\neq 0$, болса, онда мектепте оқытылатын *1*-ретті арифметикалық прогрессия алынады. $d=0$ жағдайында $a,a,...(a\in R)$ *0*-ретті прогрессия аламыз. Көршілес мүшелерінің айырмасы *1*-ретті прогрессия құрайтын реттелген $a_1,a_2,...,a_n$ тізбегі *2*-ретті прогрессия (немесе II-прогрессия) деп аталады және т.с.с., егер $a_1,a_2,...,a_n$ тізбегінің көршілес мүшелерінің айырмалары $(\kappa-1)$ - ретті прогрессия құрайтын болса, онда (a_n) тізбегі k - ретті прогрессия (немесе k - прогресссия) деп аталады [1,2].

Экзотикалы, әрі күрделі сияқты көрінгенімен жоғарғы ретті прогрессиялар күнделікті өмірдің әрбір сәтінде жолығып отырады, бірақ бізден жасырына, назарымыздан тыс қала отырып практикада және математикада едәуір жиі кездеседі. Соған қарамай біз бұл құбылыстардағы жоғарғы ретті прогрессияларды елей бермейміз. [«Табиғаттың сондай нәзік және жан діріллдетер жасампаздықпен күрделілікті карапайымдылықпен бүркеп тұруы шын мәнінде таң калдырады» (П. Эткинс). «Omnia ingeniosa simplicitas sunt» («Данышпандықтың барлығы да жай ғана карапайым нәрселер»)].

Төменде осындай прогрессиялардың көптеген (есепті) кластарының касиеттерін мазмұндаймыз және зерттейміз.Фигуралы және пирамидальды сандар жиыны, сәйкесінше екінші және үшінші ретті прогрессиялар, ал натурал сандардың k дәрежелі тізбектері k - прогрессия болып табылатынын көрсетеміз.

Аныктама. n -ші k - бұрышты фигуралы $u(k,n)$ саны төмендегідей формуламен беріледі:

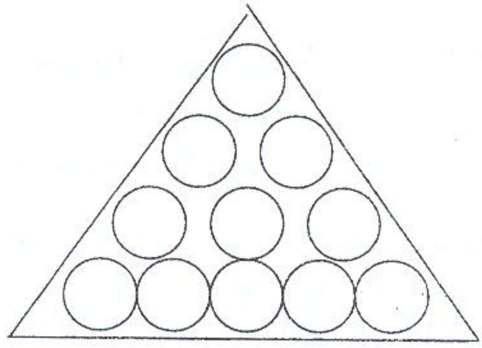
$$u(k,n)=(k-2)C_n^2+n$$

және геометриялык түрде k - бұрыштың төбелеріне сәйкес келеді.

Мысалы, $u(3,n)=C_n^2+n=C_n^2+C_n^1=C_{n+1}^2=\frac{n(n+1)}{2}$

Егер $n=5$ болса, онда $u(3;5)=C_6^2=\frac{6\cdot 5}{2}=15$

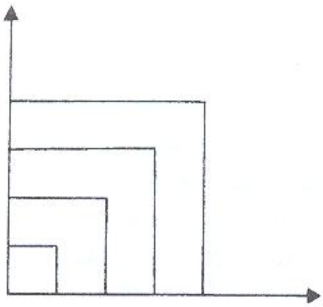
Бұл геометриялык түрде бильярд ойынындағы шарлардың бастапқы «пирамидальдык» орналасуына сәйкес келеді:



Квадрат сандар (к=4):

$$u(4,n)=2C_n^2+n=n^2$$

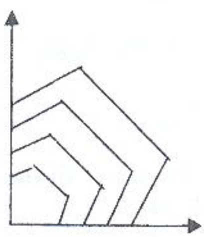
Квадрат сандарды геометриялык түрде төмендегідей интерпретациялауға болады:



Пентагональ (бесбұрышты) сандар (к=5):

$$u(5,n)=3C_n^2+n=\frac{3n^2-n}{2}$$

Бұл сандардың да жоғарыдағыдай геометриялық интерпретациясын былай көрсетуге болады:



$u(k,n)$ $[p(k,n)]-n$ -ші k -бұрышты фигуралы [пирамидальды] сан болсын делік, $u(k,n)$, $p(k,n)$ төмендегідей екені белгілі:

$u(k,n)=(k-2)C_n^2+n$ және $p(k,n)=\sum\limits_{i=1}^{n} u(k,i)=(k-2)C_{n+1}^3+C_{n+1}^2$

Осы формулалардан төмендегілерді алуға болады:

$u(k,1)=p(k,1)=1$, $u(k,2)=(k-2)C_2^2+2=k$,

$p(k,2)=k+1$, $u(k,3)=3(k-2)+3=3k-3=3(k-1)$

$p(k,3)=4k+2=2(2k+1)$

1-теорема. Бір типті фигуралы тізбектелген $u(k,n)$ сандары бірінші мүшесі $b_1=k-1$, айырмасы $d=k-2$ (яғни АП-0: $d,d,\dots,d$)

АП-1-ді тудыратын айырмасы айнымалы $d_i^{(2)} = (k-2)i+1$ болып келетін екінші ретті арифметикалық прогрессияны (АП – 2) түзеді.

Дәлелдеу. i–*дің* $1 \le i \le n$ мәндерінде көршілес мүшелерінің айырмалары $b_i = u(k,i+1) - u(k,i)$ бірінші мүшесі $b_1 = k-1$ және айырмасы $d = k-2$ болатын 1-ретті арифметикалық прогрессия (АП-1) құрайтынын көрсетеміз. $b_1 = u(k,2) - u(k,1) = k-1$, айырмасы $d = u(k,3) - 2u(k,2) + u(k,1) = 3(k-1) - 2k + 1 = k-2$ екендігін есептейміз. Енді АП-1-ден туындайтын кез келген көршілес мүшелерінің айырмасын есептейік:

$$b_{i+1} - b_i = [u(k,i+2) - u(k,i+1)] - [u(k,i+1) - u(k,i)] = (k-2)(i+1) + 1 - (k-2)i - 1 = k-2 = d,$$

ягни $d = k-2$ тұрақты сан, олай болса b_i $(i = \overline{1,n})$ тізбегі бірінші ретті прогрессия болып табылады.

Салдар. C_{i+1}^2 үшбұрышты сандар $(k=3)$ тізбегі $b_1 = 2$ және $d = 1$ болатын АП-1-ді туындататын АП-2 болып табылады.

Көрнекілік үшін АП-1-дің туындауын диаграмма арқылы көрсетейік:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
1 & & 3 & & 6 & & 10 & & 15 & & 21 & & 28 & \dots & C_{n+1}^2 & \dots \\
& 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & \dots & n & \dots & \\
& & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & 1 & \dots &
\end{array}$$

Төменгі қатар (ярус) - айырмасы $d = 0$ тұрақты $1,1,...,1,1$ тізбегі (АП-0 – нөлінші ретті прогрессия). Бірінші қатар – айырмасы айнымалы, i - ге қарағанда сызықтық функция болып табылатын $d_i^{(2)} = i+1$ үшбұрышты сандарды құрайтын 2-ші ретті арифметикалық прогрессия.

Егер $k = 4$ болса, онда $b_1 = 3$ және айырмасы $d = k-2 = 2$ болатын АП-1-ді туындататын айырмасы i-ге қатысты сызықтық функция $d_i^{(2)} = 2i+1$ болатын $(i^2)_1^n$ квадрат сандардың: $1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,..., n^2$ тізбегі – АП-2-ні аламыз.

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
1 & & 4 & & 9 & & 16 & & 25 & & 36 & & 49 & & 64 & & 81 & \dots & n^2 & \dots \\
& 3 & & 5 & & 7 & & 9 & & 11 & & 13 & & 15 & & 17 & \dots & 2n & \dots & \\
& & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & 2 & \dots &
\end{array}$$

$k=5$ болса, $b_1=k-1=4$ және айырмасы $d=k-2=3$ АП-1-ді туындататын пентагональді сандардан $1,5,12,22,35,51,70,...,\frac{3n^2-n}{2},...$ тұратын айырмасы $d_i^{(2)}=3i+1$ болатын АП-2 алынады:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
1 & & 5 & & 12 & & 22 & & 35 & & 51 & & 70 & & ... & & \frac{3n^2-n}{2} \\
& 4 & & 7 & & 10 & & 13 & & 16 & & 19 & & ... & & & \\
& & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & ... & & & &
\end{array}$$

$k>2$ $(k\in N)$ мәндерінде осыған ұқсас диаграмманың, яғни әртүрлі екінші ретті прогрессиялардың жиыны шығатыны белгілі.

2 – теорема. (1-ші теореманың жалпылама түрі). Нөмірлері бірдей натурал t санымен айрықшаланатын (ерекшеленетін) $u(k,n+t)$ фигуралы сандар жиыны бірінші мүшесі $b_1=(k-2)(C_{t+1}^2+t)$ және айырмасы $d=t^2(k-2)$ АП-1-ді туындататын екінші ретті арифметикалық прогрессия АП-2 болып табылады.

1 – салдар. $t=1$ болса (яғни, бір-бірінен кейін, катарынан), онда $b_1=k-1$, $d=k-2$ (1- теорема).

2 – салдар. Егер жоғарыдағы $k=3$ мәніндегі АП-2-нің диаграммасында тақ нөмірлі ($t=2$): 1,6,15,28,45,66,91,... және үш нөмірден кейінгі мүшелерін ($t=3$): 1,10,28,55,91,... алсақ, онда олар $b_1=1$ және $d'=2^2\cdot d=4$ $(t=4)$ және $d'=3^2\cdot d=9$ $(t=3)$ және т.с.с. болатын АП-1-ді туындататын АП -2-ні аламыз.

Егер АП-2-нің диаграммасында (к=4) 2 және 3 нөмірден кейін келетін мүшелерін алып карастырсақ, онда $b_1=1$, $d'=2^2d=8(t=2)$ және $d'=3^2\cdot d=9\cdot 2=18(t=3)$ және т.с.с. кез-келген к>2 мәндері үшін АП-1 алынады, мұндағы $d=k-2$ – АП-1-дің айырмасы (1-теорема).

3 – теорема. Тізбектелген k- бұрышты пирамидальды $p(k,n)=(k-2)C_{n+1}^3+C_{n+1}^2$ сандары k - бұрышты фигуралы сандар жиынынан тұратын АП-2-ні туындатады да, өздері АП -3-ті түзеді, яғни шексіз 3-ретті прогресиялардың жиыны бар деген сөз.

1 – салдар. $k=3$ мәнінде 1,4,10,35,56,84,..., C_{n+2}^3 пирамидальды сандар жиыны үшбұрышты сандардан тұратын АП-2 және $b_1 = 3$, $d = 1$ болатын АП-1-ді туындататын АП-3-ті құрайды, яғни:

1	4	10	20	35	56	84	...	C_{n+2}^3	...	
	3	6	10	15	21	28	...	...	...	
		3	4	5	6	7	8	...	...	

$k = 4$ мәнінде квадрат сандардан тұратын АП-2-сі бар квадрат пирамидальды сандардан 1,5,14,30,55,91,140,... , $S_2(n)$ құралған АП-3-ті аламыз:

1	5	14	30	55	91	140	...	$S_2(n)$	...
	4	9	16	25	36	49	...	...	...

2 – салдар. $S_n = \sum_{i=1}^{n} p(k,i) = (k-2)C_{n+2}^4 + C_{n+3}^3$ қосындысы және олардың $S_i\left(i = \overline{1,n}\right)$ тізбегі пирамидальды сандардан тұратын АП-3-і бар АП-4-ті құрайды, т.с.с. АП-4-тің дербес қосындыларының тізбегі АП-5-ті түзеді, т.с.с.

4 – теорема. (3-теореманың жалпы түрі). Нөмірлері натурал t санына өзгеріп отыратын, пирамидальды $p(k, n+t)$ сандар тізбегі айырмасы $d' = t^3 d$ АП-1-ді туындататын АП-3 болып табылады, мұндағы d - АП-3-тен $\left(p(k,i)\right)_1^n$ туындаған АП-1-дің айырмасы.

Жоғарыда натурал сандар тізбегінің бірінші және екінші дәрежелері, сәйкесінше АП-1 және АП-2-ні түзетіні көрсетілді. Осыған байланысты мынадай сұрақ туындайды: натурал сандардың барлық бүтін m $(m>0)$ дәрежелері m-ретті арифметикалық прогрессия (АП-m) түзе ме? Бұған келесі теорема жауап береді:

5 – теорема. Натурал сандардың m дәрежелерінің тізбегі m-ретті арифметикалық прогрессия (АП-m) түзеді, ал оның диаграммасының бірінші катары (ярусы) айырмасы d=m! болатын АП-1 болып табылады.

Салдар. $m = \overline{1,3}$ мәндері үшін $\left(i^m\right)_1^n$ АП-m прогрессиясының диаграммасы төмендегідей түрге ие болады:

m=1:

АП-1: $1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad \ldots n$

АП-0: 1 1 1 1 1 1 1 1 1 …
$m=2$:
АП-2: 1 4 9 16 25 36 49 64 81 … n^2
АП-1: 3 5 7 9 11 13 15 17 …
АП-0: 2!=2 2 2 2 2 2 2 2 …
$m=3$:
АП-3: 1 8 27 64 125 216 243 512 … n^3
АП-2: 7 19 37 61 91 127 169 217 …
АП-1: 12 18 24 30 36 42 48 …
АП-0: 3! = 6 6 6 6 6 6 …

6 – теорема. АП-m прогрессиясының n - мүшесін n-ге катысты рационал функция (полином) түрінде жазсақ: $a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + \ldots + a_1 n + a_0$, мұндағы $a_i\left(i=\overline{0,m}\right)$ n-ге байланысты емес, онда олардың алғашкы n мүшелерінің косындысы: $S_{m.n} = na_0 + C_n^2\Delta a_0 + C_n^3\Delta^2 a_0 + \ldots + C_n^{m+1}\Delta^m a_0$, мұндағы $\Delta a_i = a_{i+1} - a_0$, $\Delta^2 a_i = \Delta\Delta a_i = \Delta a_{i+1} - \Delta a_i$ және т.с.с., яғни $\Delta^j a_i = \underbrace{\Delta\Delta\ldots\Delta}_{j} a_i = \Delta^{j-1}a_{i+1} - \Delta^{j-1}a_i$ j-ретті айырманы, немесе дәл сол сиякты j-ретті $(1 \le j \le m)$ арифметикалык прогрессияның айырмасы d_j екендігін білдіреді.

Салдар. Егер $m=1$ болса, онда $S_1(n) = \sum_{i=1}^{n}(a_0 + d_1\cdot i) = na_0 + d\sum_{i=1}^{n} i = na_0 + dC_n^2$ болады. Әдетте мектеп бағдарламасында $a_0 = a_1$ деп алынады, сонда мәнерлілігі жағынан әлдекайда әсерлі болып көрінетін АП-1-дің косындысының эквивалент формуласы шығады:

$$S_1(n) = n\frac{a_1 + a_n}{2} = \left|a_n = a_1 + d(n-1)\right| = n\frac{(a_1 + a_1) + d(n-1)}{2} =$$

$$= na_1 + \frac{dn(n-1)}{2} = \begin{vmatrix} n = C_n^1 \\ \frac{n(n-1)}{2} = C_n^2 \end{vmatrix} = a_1C_n^1 + dC_n^2$$

Осы айтылған нәрселерді пайдалана отырып, төмендегі едәуір күрделі қосындылардың формулаларын қортып шығаруға болады:

$$1)\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = 1^2+3^2+\ldots+(2i-1)^2=?$$

Шешуі:

$$\sum_{1}^{n}(2i-1)^2=\sum_{1}^{n}\left(4i^2-4i+1\right)=4\sum_{1}^{n}i^2-4\sum_{1}^{n}i+n=n+4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-$$

$$-4\frac{n(n+1)}{2}=n+\frac{2}{3}\left(2n^3+n^2+2n^2n\right)-2n^2-2n=$$

$$=\frac{3n+4n^3+2n^2+4n^2+2n-6n^2-6n}{3}=\frac{4n^3-n}{3}=\frac{n\left(4n^2-1\right)}{3}=$$

$$=\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}=C_{2n+1}^3.$$

$$2)\sum_{1}^{n}(2i-1)^3=1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2\left(2n^2-1\right)$$

$$3)\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^4=\frac{n}{15}\left[48n^4-40n^2+7\right]$$

$$4)\sum_{1}^{n}(2i-1)^5=\frac{n^2}{3}\left(16n^4-20n^2+7\right)$$

7 – теорема. $S_m(n)=1^m+2^m+3^m+\ldots+n^m$ косындысы n-ге катысты $m+1$ дәрежелі рационал көпмүше (полином) болып табылады, яғни $(S_m(n))=O\left(n^{m+1}\right)$, мұндағы O(n) – n-нің реттік функциясы.

$S_m(n)=\sum_{i=1}^{n}i^m$ косындысының формуласын

$\sum_{i=0}^{n-k}C_{k+i}^k=C_k^k+C_{k+1}^k+\ldots+C_n^k=C_{n+1}^{k+1}(*)$ теңбе-теңдігін колданып тиімді

конструктивтік әдіс арқылы дәлелдеу.

$$m=1:S_1(n)=\sum_{1}^{n}\left(i=C_i^1\right)=|k=1|=C_{n+1}^{1+1}=C_{n+1}^2=\frac{n(n+1)}{2}=O\left(n^2\right)$$

Бұл нәтижені $S_1(n)\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ формуласы аркылы да алуға болатын еді, бірак біз оны жоғарыдағы тенбе-теңдіктің көмегімен $k=1$ мәні үшін корытып шығардык.

$S_2(n)$-ге арналған формуланы АП-1-дің формуласы аркылы алу мүмкін емес, бірак $(*)$ тенбе-теңдігі аркылы оны оңай дәлелдеуге болады:

$$m=2: S_2(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=C_{n+2}^3+C_{n+1}^3=O(n^3)$$

Осы әдіспен кубтардың косындысы $S_3(n)$ де өте оңай алынады:

$$m=3: S_3(n)=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=(S_1(n))^2=O(n^4)$$

Сонымен $S_3(n)$ $S_1(n)$-нің квадратына тең болады.

Енді биквадраттардың косындысын есептелік:

$$m=4: S_4(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot\frac{3n^2+3n-1}{5}=S_2(n)\frac{3n^2+3n+1}{5}=O(n^5)$$

Алынған нәтижеден кызыкты жайтты байкауға болады: квадраттардың косындысы $S_2(n)$ $S_4(n)$ үшін алынған формулада көбейткіш ретінде орын алып отыр. Бұл кездейсоктык емес, себебі $S_2(n)$ m-нің барлык жұп мәндеріндегі және дәл сол сиякты $S_3(n)$ $m\geq 3$ және m-нің так мәндеріндегі косындыларда көбейткіш ретінде орын алады.

$$m=5: S_5(n)=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\cdot\frac{(2n^2+2n+1)}{3}=S_3(n)\frac{2n^2+2n-1}{3}=O(n^6)$$

$$m=6: S_6(n)=S_2(n)\frac{3n^4+6n^3-3n+1}{7}=O(n^7)\ ;$$

$$m=7: S_7(n)=S_3(n)\frac{3n^4+6n^3-n^2-4n+2}{7}=O(n^8)\ ;$$

$$m=8: S_8(n)=S_2(n)\frac{5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3}{15}=O(n^9)\ ;$$

$$m = 9: S_9(n) = S_3(n)\frac{2n^6 + 6n^5 + n^4 + n^2 6n - 8n^3 - 3}{5} = O\left(n^{10}\right);$$

$$m = 10: S_{10}(n) = S_2(n)\frac{3n^8 + 12n^7 + 8n^6 - 18n^5 - 10n^4 + 24n^3 + 2n^2 - 15n - 5}{11} = O\left(n^{11}\right)$$

$S_m(n)$ - нің формуласы тікелей $C_k^k + ... + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$ тенбе-тендігі аркылы алынып отыр (n -ге катысты индукция әдісінсіз). $m>5$ мәндерінде өте күрделеніп кетуіне байланысты колданылуы мүмкін болмай калатын рекуренттік формулаға $S_m(n) = f\left(S_m(n-1), S_m(n-2), ...\right)$ караганда ұсынылған тәсіл едәуір оңай. $m>5$ мәндері үшін $S_m(n)$ - нің формулалары анык келтіріліп отыр және олар үшін $S_2(n)$ мен $S_3(n)$ көбейткіштерінің кездесіп кайталанып отыруы тән, ал бұл кездейсок құбылыс болмауы тиіс.

Ұсынылған жұмыста жоғарғы ретті прогрессиялардың касиеттері мен косындыларының формулалары карастырылады. Бұл прогрессиялардың бір караганда күрделі болып көрінгеніне карамай, мектеп бағдарламасында окытылатын карапайым (бірінші ретті, сызыктык) арифметикалык прогрессияның жалпылама түрі екендігі көрсетіледі. Фигуралы және пирамидальды сандардын куаттылығы жағынан шексіз тізбектері аныкталады. Олардын сәйкесінше екінші және үшінші ретті прогрессиялар түзетіні дәлелденеді.

k-ретті прогрессиянын дербес косындыларынын тізбегі (k+1)-ретті прогрессия түзетіні көрсетіледі.

Комбинаториканың тенбе-теңдіктерін колдана отырып, рационал тізбектердің косындыларын есептеу әдістері ұсынылады. Бұл әдіс алғашкы n натурал сандарынын m-ші дәрежелерінің косындысының накты формулаларын алу нәтижесінде колданылады.

Сонымен катар, алдын ала берілген t (t$\in$ N) санынан кейін кайталанып отыратын жоғарғы ретті прогрессиялардың косындыларының формулалары корытылып шығарылады.

Колданған әдебиеттер тізімі:

1. Курант Р. Что такое математика. – Москва: Мир, 2005.
2. Б.Л. Ван дер ВАРДЕН. АЛГЕБРА. – Москва: Наука, 2003.
3. Виленкин Н.Я. Алгебра, 8-9. – Москва: Просвещение, 2001.